

Capítulo 3: Estudio no linealidad en sistema OFDM

3.1 Introducción

Como sabemos, un sistema de comunicación trata de transmitir cierta información desde un transmisor a un receptor, de una manera eficiente y fiable. Contra este propósito, se dan ciertos problemas que degradan la calidad de la transmisión y que, a la hora de diseñar un sistema completo, se debe tratar de conseguir que los efectos nocivos de éstos sobre nuestros sistemas sean mínimos.

Un efecto nocivo muy popular en los sistemas de comunicaciones es el ruido. Como ruido se suele entender una serie de degradaciones que se producen en la señal de interés desde que se genera en la fuente hasta que llega al demodulador. Estas degradaciones, en general, tienen carácter aleatorio. Su estudio se basa en la caracterización de los mismos a partir de medidas para un posterior ajuste a un modelo estadístico. De este modo, se suele hablar de ruido Gaussiano o Rayleigh. Así mismo, la forma de introducir este fenómeno en un sistema ha sido la suposición de que esta degradación es consecuencia de la adición a nuestra señal de interés de una señal aleatoria, generalmente a la salida del transmisor. Sin embargo, suelen ser fuentes de

ruido tanto los dispositivos que conforman el transmisor y el receptor como el medio, físico o inalámbrico, que hay entre transmisor y receptor.

Además de este popular efecto nocivo, es muy común encontrar en sistemas que usan amplificadores de alta potencia, una cierta distorsión de la señal a su paso por este dispositivo amplificador. Por lo general, esta distorsión se suele asociar al hecho de que, para mejorar la eficiencia de un transmisor, se suele polarizar el transistor en una zona no lineal, por lo que la señal sufre lo que se denomina una distorsión no lineal. Esta distorsión no lineal provocará efectos nocivos a nuestra señal (recrecimiento espectral y aumento de la tasa de error de bits).

En particular, asumiremos que la no linealidad viene producida únicamente por el amplificador de potencia, lo cual es una buena aproximación muy usada en la literatura actual. De esta forma, parece interesante estudiar la forma de operar de un amplificador de potencia, intentando hallar un modelo que relacione la entrada con la salida, teniendo en cuenta los efectos no lineales y de memoria.

Este capítulo pretende dar al lector unos conocimientos generales sobre el tema referente a la no linealidad, haciendo hincapié en los sistemas OFDM que es el tema principal de este proyecto. Para ello este capítulo se ha dividido en dos partes bien diferenciadas:

- Estudio general no linealidad: En esta primera parte se realiza el estudio sobre la no linealidad sin pretender centrarse en los sistemas OFDM, sino en presentar todos los conocimientos necesarios para posteriormente realizar el estudio de los sistemas OFDM no lineales. Para ello, esta sección contendrá conocimientos sobre los diferentes tipos de no linealidades, los distintos modelos que se utilizan para representar la no linealidad en los sistemas y por último los efectos que normalmente causan las no linealidades en los sistemas de comunicación.
- No linealidad en OFDM: Esta segunda sección se centrará en el estudio matemático de las no linealidades en los sistemas OFDM. Se expondrán unos conocimientos y se llegarán a unas ecuaciones sobre los sistemas OFDM no lineales que serán utilizados y simulados en el capítulo posterior sobre simulación del efecto de la no linealidad en sistemas OFDM.

3.2 Estudio general de las no linealidades

Como se ha comentado anteriormente en esta sección se va a realizar un estudio general sobre las no linealidades en el cual se expondrán los distintos tipos de no linealidades, posteriormente los modelos matemáticos que pueden ser utilizados para representar las no linealidades y los parámetros más importantes que caracterizan a los amplificadores no lineales, y por último los efectos que tienen en los sistemas las no linealidades.

3.2.1 Modelado del canal con y sin memoria

Los amplificadores de potencia (PA o HPA) son elementos indispensables de los sistemas de comunicaciones modernos y son componentes inherentemente no lineales. Los PAs se pueden clasificar de acuerdo al grado de no linealidad que presenten, lo cual también dicta su eficiencia. Una alta linealidad del amplificador implica baja eficiencia, lo que significa que la potencia que llega a la carga es reducida. Por otra parte, una alta no linealidad, causa efectos nocivos como recrecimiento espectral y un aumento en la tasa de error de bit. Así pues, la linealización de los PA es a menudo necesaria con el objetivo de mejorar la linealidad manteniendo una buena eficiencia.

La predistorsión es un método popular para linealizar un PA para lo cual, el modelado del PA a veces es un importante primer paso. Antes de escoger un método de linealización, se debe decidir si el PA muestra efectos de memoria. Las causas de los efectos de memoria pueden ser eléctricos o electro-térmicos. Amplificadores de alta potencia (HPA) tales como los usados en las estaciones bases de sistemas wireless presentan esos efectos de memoria; las señales de banda ancha también tienden a incluir efectos de memoria en el PA. En estos casos, una predistorsión sin memoria sería inefectiva. Entonces, una representación de los efectos de memoria de los PA parece crucial para emprender la tarea del diseño de los métodos de linealización.

Denotemos por $\tilde{x}(t)$ la señal de entrada en banda base al PA y por $\tilde{y}(t)$ la salida en banda base. La conversión AM/AM se define como la función que recoge el cambio entre la amplitud de la señal en banda base de entrada, $|\tilde{x}(t)|$, y la amplitud de la señal en banda base de la salida, $|\tilde{y}(t)|$. La conversión AM/PM se define como la función que

recoge el cambio entre la amplitud de la señal en banda base de entrada, $|\tilde{x}(t)|$, y la desviación de la fase de la señal en banda base de la salida, $\angle[\tilde{y}(t)] - \angle[\tilde{x}(t)]$. La linealización de dispositivos no lineales que pueden ser completamente caracterizados con las conversiones AM/AM y AM/PM no suele ser demasiado complicada. Por ejemplo, estos predistorsionadores pueden ser implementados con una tabla de correspondencia (look up table, LUT). La LUT crea las funciones de mapeo (AM/AM y AM/PM) para el predistorsionador, con valores que son complementarios a los que genera el PA antes esas mismas entradas.

Consideremos un ejemplo, un modelo en banda base de un PA no lineal de orden $(2K+1)$:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=0}^K a_{2k+1} |\tilde{x}(t)|^{2k} \tilde{x}(t) \quad (3.1)$$

donde a_{2k+1} es el coeficiente del término no lineal de orden $(2K+1)$.

Desde el punto de vista del procesamiento de señal, el sistema representado por la Ecuación (3.1) es sin memoria, ya que la salida $|\tilde{y}(t)|$ depende sólo de la entrada $|\tilde{x}(t)|$ en ese mismo instante. Sin embargo, en la literatura de Microondas y RF, si $\{a_{2k+1}\}$ son reales, el modelo de (3.1) se llama sin memoria, si la conversión AM/PM es constante. De otro modo, el sistema representado por la Ecuación (3.1) es considerado cuasi-sin memoria, lo que implica que existen efectos de memoria de término corto. Los síntomas de un sistema cuasi-sin memoria es que la conversión AM/PM varía con $|\tilde{x}(t)|$. Así pues, a veces es confuso encontrar la naturaleza exacta de los efectos nocivos en dispositivos no lineales usados en comunicaciones.

Cuando efectos de memoria de término largo suceden, las conversiones AM/AM y AM/PM son insuficientes para caracterizar al PA, y se emplean modelos más elaborados como el de las series de Volterra.

En este apartado examinaremos qué significan los efectos de memoria paso banda y en banda base. A continuación, trataremos de relacionar los modelos de no linealidades en banda base y paso banda. Pasaremos a explicar cuatro sistemas especiales con memoria ampliamente utilizados. Por último, incluiremos un pequeño resumen del apartado.

3.2.1.1 Representación en banda base

En esta sección, obtendremos la relación entrada/salida de la señal en banda base a partir de la relación entrada/salida de la correspondiente señal paso banda. Después, consideraremos dos casos, cuasi-sin memoria y sin memoria.

En la Figura. 3.1, un diagrama de bloques muestra la conversión de una señal compleja en banda base a paso banda, la transmisión de la señal real paso banda al canal y la conversión a banda base de nuevo en el lado receptor. La relación entre el valor real paso banda, $x(t)$, y el valor complejo en banda base, $\tilde{x}(t)$, viene dado por:

$$x(t) = \text{Re}\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \Leftrightarrow \tilde{x}(t) = 2\text{LPF}[x(t)e^{-j2\pi f_0 t}] \quad (3.2)$$

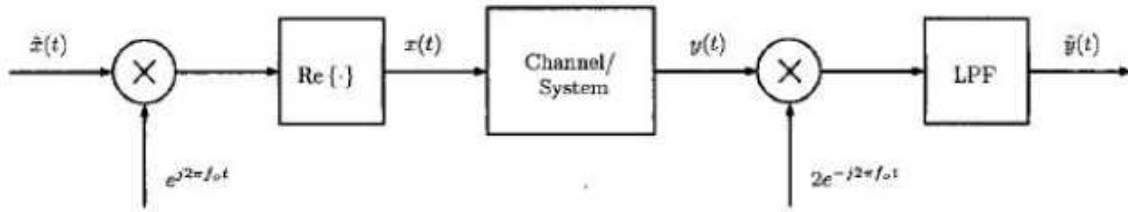


Figura 3.1: Modelo de bloques de un sistema de transmisión, indicando explícitamente las señales en banda base y pasobanda, con las operaciones involucradas en cada paso.

donde f_0 es la frecuencia de la portadora, $\text{LPF}[\cdot]$ denota la operación de filtrado paso bajo, y $\text{Re}\{\cdot\}$ denota la parte real. Análogamente, la relación entre el valor real paso de banda de la señal de salida, $y(t)$, y el valor complejo en banda base de la señal de salida, $\tilde{y}(t)$, viene dado por:

$$y(t) = \text{Re}\{\tilde{y}(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \Leftrightarrow \tilde{y}(t) = 2\text{LPF}[y(t)e^{-j2\pi f_0 t}] \quad (3.3)$$

El “canal” (en realidad nos referimos a la parte no lineal del sistema, no al canal de transmisión), en general, puede ser lineal o no lineal (NL). Sujeto a ciertos requerimientos (que supondremos que se cumplen), las series de Volterra pueden ser utilizadas para representar un sistema invariante en el tiempo y NL como sigue:

$$y(t) = \sum_k \int \dots \int h_k(\bar{\tau}_k) \prod_{i=1}^k x(t - \tau_i) d\bar{\tau}_k \quad (3.4)$$

donde $\bar{\tau}_k = [\tau_1, \dots, \tau_k]^T$, $h_k(\cdot)$ es el kernel de Volterra de k-ésimo orden, y $d\bar{\tau}_k = d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$. Asumiendo que $x(t)$ es limitada en banda con ancho de banda $B_x \ll f_0$, y sustituyendo (3.2) y (3.3) en (3.4), la señal de salida compleja, $\tilde{y}(t)$, se simplifica en:

$$\tilde{y}(t) = \sum_k \int \dots \int h_{2k+1}(\tau_{2k+1}) \prod_{i=1}^{k+1} \tilde{x}(t - \tau_i) \prod_{i=k+2}^{2k+1} \tilde{x}^*(t - \tau_i) d\tau_{2k+1} \quad (3.5)$$

donde

$$\tilde{h}_{2k+1}(\tau_{2k+1}) = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k+1}{k} \times h_{2k+1}(\tau_{2k+1}) e^{-j2\pi f_0 \left(\sum_{i=1}^{k+1} \tau_i - \sum_{i=k+2}^{2k+1} \tau_i \right)} \quad (3.6)$$

y $(\cdot)^*$ denota el complejo conjugado. Si definimos la k-dimensional transformada de Fourier de $h_k(\tau_k)$:

$$H_k(\bar{f}_k) = \int \dots \int h_k(\tau_k) e^{-j2\pi \bar{f}_k^T \tau_k} d\bar{\tau}_k \quad (3.7)$$

donde $\bar{f}_k = [f_1, f_2, \dots, f_k]^T$, se sigue que la transformada de Fourier de (3.6) es

$$\tilde{H}_{2k+1}(\bar{f}_{2k+1}) = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k+1}{k} \times H_{2k+1}(\bar{f}_{2k+1} + f_0 [\bar{1}_{k+1}^T, -\bar{1}_k^T]) \quad (3.8)$$

donde $\bar{1}_k = [1, \dots, 1]^T$ es un k -dimensional vector columna de unos. Por ejemplo, con $k=1$, la Ecuación (3.8) resulta:

$$\tilde{H}_3(f_1, f_2, f_3) = \frac{3}{4} H_3(f_1 + f_0, f_2 + f_0, f_3 - f_0) \quad (3.9)$$

Examinaremos las ramificaciones de la relación entrada/salida en banda base bajo dos escenarios.

3.2.1.2 El caso cuasi-sin memoria

Si la señal $x(t)$ es de banda estrecha tal que $\tilde{x}(t - \tau_i) \approx \tilde{x}(t)$ sobre cada kernel, $h_k(\tau_k)$, podemos $\tilde{x}(t - \tau_i)$ sustituir por $\tilde{x}(t)$ en (3.5) para obtener

$$\tilde{y}(t) = \sum_k \int \dots \int \tilde{h}_{2k+1}(\bar{\tau}_{2k+1}) d\bar{\tau}_{2k+1} |\tilde{x}(t)|^{2k} \tilde{x}(t) = \sum_k \tilde{H}_{2k+1}(\bar{0}_{2k+1}) |\tilde{x}(t)|^{2k} \tilde{x}(t) \quad (3.10)$$

$$= \sum_k \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k+1}{k} H_{2k+1}(f_0 [\bar{1}_{k+1}^T, -\bar{1}_k^T]^T) |\tilde{x}(t)|^{2k} \tilde{x}(t) \quad (3.11)$$

donde $\bar{0}_k = [0, \dots, 0]^T$ es un vector columna de k ceros. Como el lado derecho depende de $\tilde{x}(t)$ solamente, estamos ante una señal sin memoria desde el punto de vista del procesamiento de señal. Comparando con (3.1), podemos ver que

$$a_{2k+1} = \tilde{H}_{2k+1}(\bar{0}_{2k+1}) = H_{2k+1}(f_0 [\bar{1}_{k+1}^T, -\bar{1}_k^T]^T) \quad (3.12)$$

Así pues, tanto $\tilde{H}_{2k+1}(\bar{0}_{2k+1})$ como $H_{2k+1}(f_0 [\bar{1}_{k+1}^T, -\bar{1}_k^T]^T)$ pueden determinar la relación polinomial en banda base entre $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$. La relación en banda base (3.10) es sin memoria pero el dispositivo físico, como describe $h_k(\bar{\tau}_k)$, tiene memoria. El hecho de que la señal sea de banda estrecha hace que la transformada de Fourier del kernel, $H_k(\bar{f}_k)$, sea de banda ancha en comparación. Como $h_k(\bar{\tau}_k)$ ocupa un pequeño período de tiempo comparado con la variación temporal de $\tilde{x}(t)$, el efecto de memoria es considerado como de término corto. Además, $\tilde{H}_{2k+1}(\bar{0}_{2k+1})$, que es proporcional a

$H_{2k+1} \left(f_0 [\bar{1}_{k+1}^T, -\bar{1}_k^T]^T \right)$, es un valor en general complejo, luego $\text{angle}[\tilde{y}(t)] - \text{angle}[\tilde{x}(t)]$ no es constante (conversión AM/PM está presente). Tales sistemas son referidos como cuasi-sin memoria en la literatura de microondas de RF.

3.2.1.3 El caso sin memoria

Si el dispositivo físico es estrictamente sin memoria, tendremos que:

$$h_k(\bar{\tau}_k) = c_k \prod_{i=1}^k \delta(\tau_i) \quad (3.13)$$

donde c_k es un valor real. Sustituyendo (3.13) en (3.6), obtenemos

$$\tilde{h}_{2k+1}(\bar{\tau}_{2k+1}) = \tilde{c}_{2k+1} \prod_{i=1}^{2k+1} \delta(\tau_i) \quad (3.14)$$

donde $\tilde{c}_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k+1}{k} c_{2k+1}$. Como c_{2k+1} es un valor real, tanto $\tilde{c}_{2k+1}$ como $\tilde{h}_{2k+1}(\bar{\tau}_{2k+1})$ son valores reales también. Dicho de otro modo, no sólo el sistema paso banda es sin memoria sino que también el sistema en banda base lo es. Como resultado, la señal compleja en banda base es:

$$\tilde{y}(t) = \sum_k \tilde{H}_{2k+1}(\bar{0}_{2k+1}) |\tilde{x}(t)|^{2k} \tilde{x}(t) = \sum_k \tilde{c}_{2k+1} |\tilde{x}(t)|^{2k} \tilde{x}(t) \quad (3.15)$$

Si la relación entrada salida de un PA obedece (3.15), su característica AM/AM es

$$|\tilde{y}(t)| = |\tilde{x}(t)| G(|\tilde{x}(t)|) \quad (3.16)$$

donde la ganancia compleja es

$$G(r) = \left| \sum_k \tilde{c}_{2k+1} r^{2k} \right| \quad \text{donde } r = |\tilde{x}(t)| \quad (3.17)$$

y la relación AM/PM se describe como:

$$\text{angle}[\tilde{y}(t)] - \text{angle}[\tilde{x}(t)] = \text{angle}[G(\tilde{x}(t))] \quad (3.18)$$

Nótese que como los coeficientes, $\tilde{c}_{2k+1}$, son reales, la fase de $G(r)$ es 0 o π . Sin embargo, para que la fase cambie, la ganancia, $G(r)$, debe ser cero en el punto de cambio de fase, haciendo a la vez la salida del PA cero. Como la señal no puede ser atenuada hasta cero por un PA, se concluye que el cambio de fase, $\text{angle}[\tilde{y}(t)] - \text{angle}[\tilde{x}(t)]$, permanece constante. De este modo, demostramos que un PA NL sin memoria no tiene conversión AM/PM.

3.2.1.4 Algunos casos especiales

Acabamos de ver que un sistema NL estrictamente sin memoria tiene conversión AM/AM pero no tiene conversión AM/PM (AM/PM es constante). Por el contrario, un sistema NL cuasi-sin memoria presenta tanto distorsión AM/AM como AM/PM. En esta sección, investigaremos lo contrario: si una conversión AM/PM constante implica un comportamiento no lineal sin memoria. Veremos que hay dos casos especiales del modelo de Volterra, i.e. los sistemas de Hammerstein y Wiener, que son con memoria pero pueden mantener aun una conversión AM/PM constantes cuando se aplica una señal de banda estrecha.

3.2.1.4.1 Sistemas de Kernel Diagonal

Consideremos el sistema de kernel diagonal, cuyo kernel de k-ésimo orden viene dado por:

$$h_k(\bar{\tau}_k) = \phi_k(\bar{\tau}_1) \prod_{i=1}^k \delta(\bar{\tau}_i - \bar{\tau}_1) \quad (3.19)$$

Nótese que los valores del kernel son sólo no cero en los términos de la diagonal $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k$. Substituyendo (3.19) en (3.4), la relación entrada/salida paso banda viene dada por:

$$y(t) = \sum_k \int \phi_k(\tau_1) x^k(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (3.20)$$

La parte de la derecha de (3.20) es también conocida como el polinomio de memoria de $x(t)$. Si la señal de entrada $\tilde{x}(t)$ a este sistema es de banda estrecha, la relación entrada/salida viene dada por (3.1)] con

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k+1}{k} \Phi_{2k+1}(f_0) \quad (3.21)$$

donde $\Phi_k(f)$ es la transformada de Fourier de $\phi_k(\tau)$. Nótese que aunque $\phi_k(\tau)$ es un valor real, $\Phi_k(f_0)$ no es un valor real en general y, por tanto, AM/PM no es constante. Sin embargo, casos especiales del kernel diagonal existen donde la conversión AM/PM es constante.

3.2.1.4.2 Sistema de Hammerstein

Si una no linealidad sin memoria es seguida por una sistema LTI, el sistema conjunto se llama sistema de Hammerstein. El sistema de Hammerstein es un caso especial de un sistema de kernel diagonal, donde $\phi_k(t) = c_k \phi(\tau)$. Sustituyendo esta relación de kernel en (3.21), obtenemos

$$y(t) = \int \phi(\tau_1) \sum_k c_k x^k(t - \tau_1) d\tau_1 = \phi(t) * u(t) \quad \text{donde } u(t) = \sum_k c_k x^k(t) \quad (3.22)$$

donde $*$ denota la convolución. La ecuación de arriba considera que $x(t)$ pasa primero por un sistema sin memoria no lineal y después por un sistema LTI para obtener $y(t)$, y así el sistema completo de Hammerstein. Si la entrada del sistema de Hammerstein es de banda estrecha, la relación entrada salida viene dada por (3.1) con

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k+1}{k} c_{2k+1} \Phi(f_0) \quad (3.23)$$

donde $\Phi(f)$ es la transformada de Fourier de $\phi(\tau)$. Como en el sistema de Hammerstein, $h_k(\tau_k) = c_k \phi(\tau_1) \prod_{i=1}^k \delta(\tau_i - \tau_1)$ y $\{c_k\}$ son valores reales, a_{2k+1} en (3.23)

tiene $\angle[a_{2k+1}] = \angle[\Phi(f_0)]$, que no depende de k . Como consecuencia, la conversión AM/PM es constante.

3.2.1.4.3 Sistema de Kernel Separable

Consideremos el caso del kernel de Volterra de orden k -ésimo pueda ser escrito como el producto de k funciones unidimensionales,

$$h_k(\bar{\tau}_k) = \prod_{i=1}^k \psi_k(\tau_i) \quad (3.24)$$

donde cada función $\psi_k(\cdot)$ tiene valor real y una dimensión. Este sistema se llama de kernel separable. Sustituyendo (3.24) en (3.4) y simplificando, la relación entrada/salida paso banda es

$$y(t) = \sum_k \left(\int \psi_k(t) x(t - \tau) d\tau \right)^k \quad (3.25)$$

Si la entrada $x(t)$ es de banda estrecha, la relación entrada/salida en banda base de este sistema viene dada por (3.1) como:

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k+1}{k} \left| \Psi_{2k+1}(f_0) \right|^{2k} \Psi_{2k+1}(f_0) \quad (3.26)$$

donde $\Psi_k(f)$ es la transformada de Fourier de $\psi_k(\tau)$. Nótese que aunque $\psi_k(\tau)$ es real, $\Psi_k(f)$ no es real en general, por lo que la conversión AM/PM no es constante. Sin embargo, hay casos especiales de kernel diagonal donde la conversión AM/PM es constante.

3.2.1.4.4 Sistema Wiener

Si un sistema LTI es seguido por un sistema sin memoria no lineal, el sistema global se llama sistema de Wiener. El sistema de Wiener es un caso especial de kernel separable, donde $\psi_k(\tau) = \sqrt[k]{c_k} \psi(\tau)$. Entonces,

$$y(t) = \sum_k c_k \left(\int \psi(\tau) x(t - \tau) d\tau \right)^k \quad (3.27)$$

Como $u(t) = \psi(t) * x(t)$, $y(t) = \sum_k c_k u^k(t)$, el sistema que transforma $x(t)$ en $y(t)$ es de Wiener. El kernel de Volterra de orden k -ésimo viene dado por:

$$h_k(\bar{\tau}_k) = c_k \prod_{i=1}^k \psi(\tau_i) \quad (3.28)$$

donde c_k y $\psi(\cdot)$ son reales. Si la entrada $x(t)$ al sistema de Wiener es de banda estrecha, la relación entrada/salida en banda base viene dada por (3.1) con:

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k+1}{k} c_{2k+1} |\Psi(f_0)|^{2k} \Psi(f_0) \quad (3.29)$$

donde $\Psi(f)$ es la transformada de Fourier de $\psi(\tau)$. Como $\angle[a_{2k+1}] = \angle[\Psi(f_0)]$ es independiente de k , la conversión AM/PM es constante.

3.2.1.5 Conclusión

Como hemos visto, las series de Volterra son un modelo general de sistema no lineal con memoria. Para comenzar, describimos la relación entrada/salida en banda base de un modelo de PA de series de Volterra cuya entrada es una señal paso banda. Cuando un PA físico (dispositivo) presenta efectos de memoria de término corto, se dice que es cuasi-sin memoria, porque la correspondiente relación entrada/salida en banda base es sin memoria. Este es un punto potencial de confusión a lo largo de la literatura al respecto. En general, las conversiones AM/AM y AM/PM no pueden describir completamente el PA, aunque sí podrá si el sistema es cuasi-sin memoria.

Por otro lado, si el dispositivo PA es estrictamente sin memoria, la salida es simplemente una función polinómica de la entrada, y la conversión AM/PM resultante es constante. Así, la conversión AM/AM sola es suficiente para caracterizar completamente al PA. Este, sin embargo, no es el único caso en el que no hay AM/PM. Hemos visto que si una señal de banda estrecha pasa a través de un sistema no lineal de

Wiener o de Hammerstein, la conversión AM/PM es también constante. Será importante distinguir los casos de no linealidades con memoria de término largo, de término corto y sin memoria, ya que afectaran de manera distinta la estrategia de linealización que queramos seguir.

3.2.2 Modelos de Saleh para sistemas No Lineales

Como hemos visto en el apartado anterior, los amplificadores de potencia, en general, presentan una distorsión no lineal tanto en amplitud (AM/AM conversión) como en fase (AM/PM conversión). En la literatura se puede encontrar dos modelos no lineales, paso banda e independientes de la frecuencia equivalentes para estudiar los efectos negativos de estas no linealidades en varios sistemas de comunicación. Estos son el modelo de amplitud-fase y el modelo de cuadratura, en los cuales la porción de señal de salida que cae en la misma zona espectral que la señal de banda limitada de entrada, se describe en términos de la envolvente de la señal de entrada, en vez de en su valor instantáneo. Para especificar cada modelo, uno tiene que conocer dos funciones, la función de amplitud y fase para el primer modelo, y la función de fase y cuadratura para el segundo. Se han propuesto varias soluciones para estas funciones que, por lo general, tienen en común que son complejas o requieren el conocimiento de algún parámetro. La validez de cada una de estas fórmulas se comprueba mediante medidas experimentales, tras procesos de ajuste.

3.2.2.1 Modelo Amplitud-Fase

Pasemos a comentar el modelo de Amplitud-Fase propuesto por Saleh, por ser uno de los más utilizados en simulaciones actuales, debido a su sencillez y sus buenos resultados.

Consideremos que la señal de entrada es:

$$x(t) = r(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)] \quad (3.30)$$

donde ω_0 es la portadora de frecuencia, y $r(t)$ y $\psi(t)$ son la envolvente y la fase de la señal modulada, respectivamente. En el modelo de Amplitud-Fase, la salida del sistema no lineal se suele escribir como:

$$y(t) = A[r(t)]\cos[\omega_0 t + \psi(t) + \Phi[r(t)]] \quad (3.31)$$

donde $A(r)$ es una función impar de r , con un término lineal dominante que representa la conversión AM/AM, y $\Phi(r)$ es una función par de r , con un término cuadrático dominante que representa la conversión AM/PM.

Para el modelado de $A(r)$ y de $\Phi(r)$ se han propuesto numerosas alternativas, más o menos acorde a la realidad de los dispositivos, por muchos autores a lo largo de los años. El modelo que aquí presentaremos es, como se mencionó al principio de este apartado, el propuesto por Saleh. En este caso, las fórmulas para $A(r)$ y $\Phi(r)$ son:

$$A[r(t)] = \frac{\alpha_a r(t)}{1 + \beta_a r^2(t)} \quad (3.32)$$

$$\phi[r(t)] = \frac{\alpha_\phi r^2(t)}{1 + \beta_\phi r^2(t)} \quad (3.33)$$

Nótese cómo para grandes valores de r , $A(r)$ es proporcional a $1/r$, y $\Phi(r)$ permanece constante.

3.2.2.2 Modelo de Cuadratura

En el modelo en cuadratura, si la señal de entrada es la misma que en el caso anterior, $x(t) = r(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t)]$, la señal de salida viene dada por la suma de las componentes en fase y cuadratura, Figura 3.2:

$$p(t) = P[r(t)]\cos[\omega_0 t + \psi(t)] \quad (3.34a)$$

$$q(t) = -Q[r(t)]\sin[\omega_0 t + \psi(t)] \quad (3.34b)$$

donde $P(r)$ y $Q(r)$ son funciones impares de r con términos lineales y cúbicos dominantes, respectivamente. En realidad, (3.34) puede deducirse de (3.31) con

$$P(r) = A(r)\cos[\Phi(r)] \quad (3.35a)$$

$$Q(r) = A(r)\sin[\Phi(r)] \quad (3.35b)$$

Para las funciones $P(r)$ y $Q(r)$ se han propuestos distintas formas, tales como polinomios impares y series de Bessel. Según Saleh, una representación suficiente para obtener resultados que se ajustan muy bien a los experimentales y que igualan o mejoran a las funciones propuestas anteriores, sería la siguiente:

$$P(r) = \frac{\alpha_p r}{1 + \beta_p r^2} \quad (3.36)$$

$$Q(r) = \frac{\alpha_q r^3}{(1 + \beta_q r^2)^2} \quad (3.37)$$

Veamos que para valores grandes de r , tanto $P(r)$ como $Q(r)$ tienden a $1/r$, mientras que para el caso de funciones de Bessel, por ejemplo, se tendería a una constante.

Una propiedad útil de (3.36) y (3.37) es que se cumple la relación:

$$Q(r) = - \left. \frac{\partial P(r)}{\partial \beta_p} \right|_{\text{si } \alpha_p \rightarrow \alpha_q, \beta_p \rightarrow \beta_q} \quad (3.38)$$

De esta forma, calcular el espectro de $Q(r)$ a partir del de $P(r)$ para un $r(t)$ dado se simplifica enormemente.

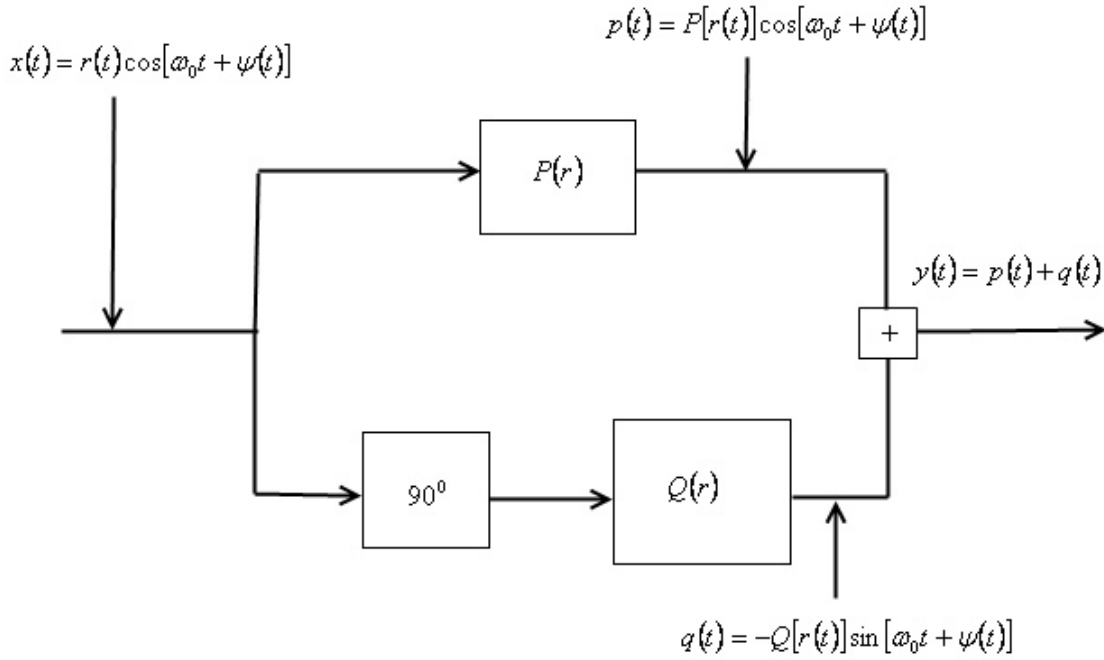


Figura 3.2: Esquema del modelo en cuadratura

Como se puede imaginar, ambos modelos se han de someter a un proceso de ajuste para hallar las constantes involucradas en cada caso. Esto se puede hacer mediante un ajuste de mínimos cuadrados en torno a una serie de medidas practicadas. Estas medidas, debido a la sencillez de los modelos, pueden ser baterías de medidas de un tono, a las que posteriormente se le aplicarían procedimientos computacionales, como los comentados. Además, una simple interpretación de las medidas obtenidas a diferentes frecuencias permite incluir en el modelo en cuadratura los efectos de selectividad en frecuencia. Esto puede ser particularmente interesante para amplificadores de banda no muy ancha o cuando las señales de entras son de banda ancha.

3.2.2.3 Modelo en cuadratura dependiente de la frecuencia

Hasta ahora en el Apartado 3.2.2, se ha considerado que las características del amplificador eran independientes de la frecuencia en la banda de interés, lo cual en la práctica sucede en algunos casos. Sin embargo, cuando se usan señales de banda ancha, o cuando no todos los componentes de un sistema tienen el mismo ancho de banda que el amplificador, se hace necesario el empleo de un modelo dependiente en frecuencia. Trataremos de encontrar un modelo de esas características cuyos parámetros puedan ser inferidos a partir de medidas de un solo tono.

Consideremos un test de un tono en el que la señal de entrada podemos ajustarla en amplitud, r , y en frecuencia, f . Consideremos que la amplitud y la fase de la señal de salida son $A(r, f)$ y $\Phi(r, f)$, respectivamente. Consideremos que:

$$\Phi_0(f) = \lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r, f) \quad (3.39)$$

es la respuesta de pequeña señal. Es decir, $\Phi(r, f) - \Phi_0(f) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$. Usando (3.35), podemos obtener la componente en fase y en cuadratura de la señal de salida:

$$P(r, f) = A(r, f) \cos[\Phi(r, f) - \Phi_0(f)] \quad (3.40)$$

$$Q(r, f) = A(r, f) \sin[\Phi(r, f) - \Phi_0(f)] \quad (3.41)$$

Para cada f , se podrían ajustar las Ecuaciones de (3.36) y (3.37) a unos datos experimentales. Esto se podría expresar como una dependencia de los parámetros con respecto a la frecuencia: $\alpha_p(f), \beta_p(f), \alpha_q(f), \beta_q(f)$. Definamos ahora las funciones:

$$H_p(f) = \sqrt{\beta_p(f)} \quad (3.42)$$

$$G_p(f) = \frac{\alpha_p(f)}{\sqrt{\beta_p(f)}} \quad (3.43)$$

$$H_q(f) = \sqrt{\beta_q(f)} \quad (3.44)$$

$$G_q(f) = \frac{\alpha_q(f)}{(\sqrt{\beta_q(f)})^3} \quad (3.45)$$

Definamos las envolventes independientes de frecuencia normalizadas:

$$P_0(r) = \frac{r}{1+r^2} \quad (3.46)$$

$$Q_0(r) = \frac{r^3}{(1+r^2)^2} \quad (3.47)$$

que se obtiene de (3.36) y (3.37) haciendo unidad las constantes. Se puede observar a partir de (3.36), (3.42), (3.43), (3.46) y Figura 3.2 que el paso de una señal de un tono a través de la rama de la componente en fase se puede dividir en tres pasos. Primero, la amplitud de entrada se escala por $H_p(f)$; después, la señal resultante pasa a través de la envolvente no lineal independiente de frecuencia $P_0(r)$; finalmente, la amplitud de salida se escala por $G_p(f)$. Otros tres pasos similares se pueden proponer para la rama en cuadratura. Ahora, desarrollando cada una de las operaciones de escala de amplitud dependientes de frecuencia mencionadas, las operaciones se pueden interpretar como una señal que pasa a través de una serie de sistemas lineales que tienen la correspondiente respuesta real en frecuencia. Esto lleva al modelo en cuadratura dependiente de frecuencia que se muestra en la Figura 3.3.

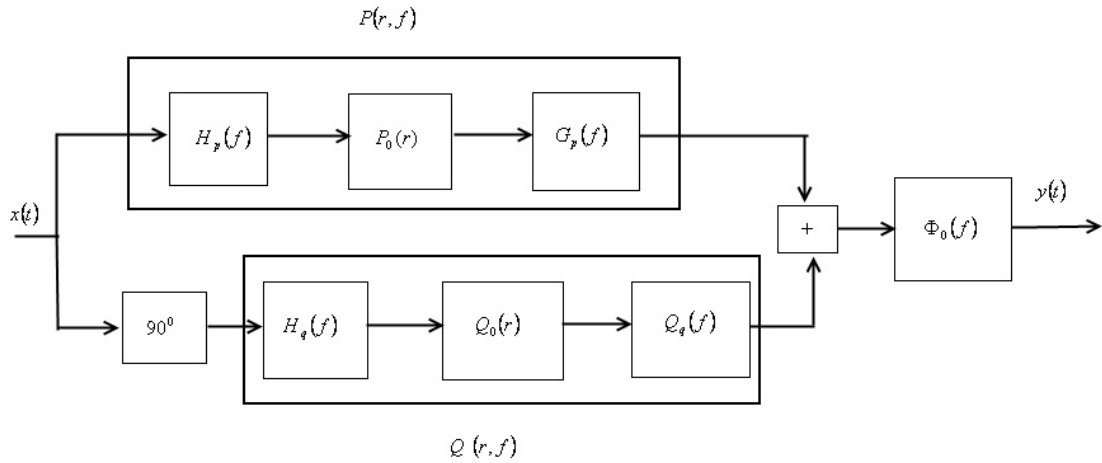


Figura 3.3: Esquema del modelo en cuadratura dependiente de la frecuencia

Este modelo es válido para señales de entrada de un solo tono, por la originalidad del proceso, y los pasos seguidos. La caja final del modelo de la Figura 3.3 es lineal, pasa todo, con una respuesta en frecuencia unidad, y una respuesta en fase $\Phi_0(f)$ definida en (3.39), que servirá para igualar la fase.

3.2.3 Efecto de las no linealidades de un PA

La distorsión que se introduce en la señal que queremos transmitir es consecuencia de las características no lineales de los subsistemas de los que consta el sistema de comunicación completo. Podemos citar como causantes, pues, algunos como antenas, mezcladores, convertidores A/D y, sobre todo por ser el centro de estudio de

este apartado, los amplificadores. En el caso particular de amplificadores a semiconductor, la no linealidad viene heredada de la no linealidad de los elementos semiconductores.

Las consecuencias de las no linealidades en sistemas de comunicaciones serán: distorsión de la constelación, modificación de las características espectrales y reducción de la eficiencia en potencia.

3.2.3.1 Distorsión de la constelación

Uno de los efectos más importantes en comunicaciones digitales que producen las no linealidades será la corrupción de la información: cuando aumenta la potencia de entrada haciéndose la no linealidad más fuerte, los símbolos transmitidos se desvían de los previstos en gran medida (la constelación sufre un combado característico). Esto resultará, si la perturbación es lo suficientemente dura, en una distorsión en los límites de decisión de la constelación, aumentando con ello la tasa de error del sistema.

En sistemas de comunicación inalámbricos modernos, en donde se están adoptando constelaciones con símbolos cada vez más cercanos para conseguir tasas de transferencia lo suficientemente competitivas, una modificación leve de las fronteras de decisión podría perjudicar muy gravemente la transmisión. Este es el caso de esquemas con OFDM, en donde la IFFT que hay que aplicar a los símbolos de entrada (QPSK, QAM,...) hace que la constelación se transforme en una constelación con más puntos y, por tanto, con menos espacio entre unos símbolos y otros. Es decir, más sensible a no linealidades.

3.2.3.2 Regeneración del espectro (spectral regrowth)

La regeneración del espectro es un efecto significativo de la distorsión de dispositivos no lineales, particularmente en amplificadores de potencia en aplicaciones wireless, que está relacionada con la distorsión de intermodulación (IMD). Cuando una señal modulada pasa por un dispositivo no lineal, su ancho de banda se ensancha por las no linealidades de orden impar. Esto es causa de la creación de productos de mezcla entre las componentes de frecuencia individuales del espectro. Podemos ver su efecto, de forma gráfica, en la siguiente figura, Figura 3.4:

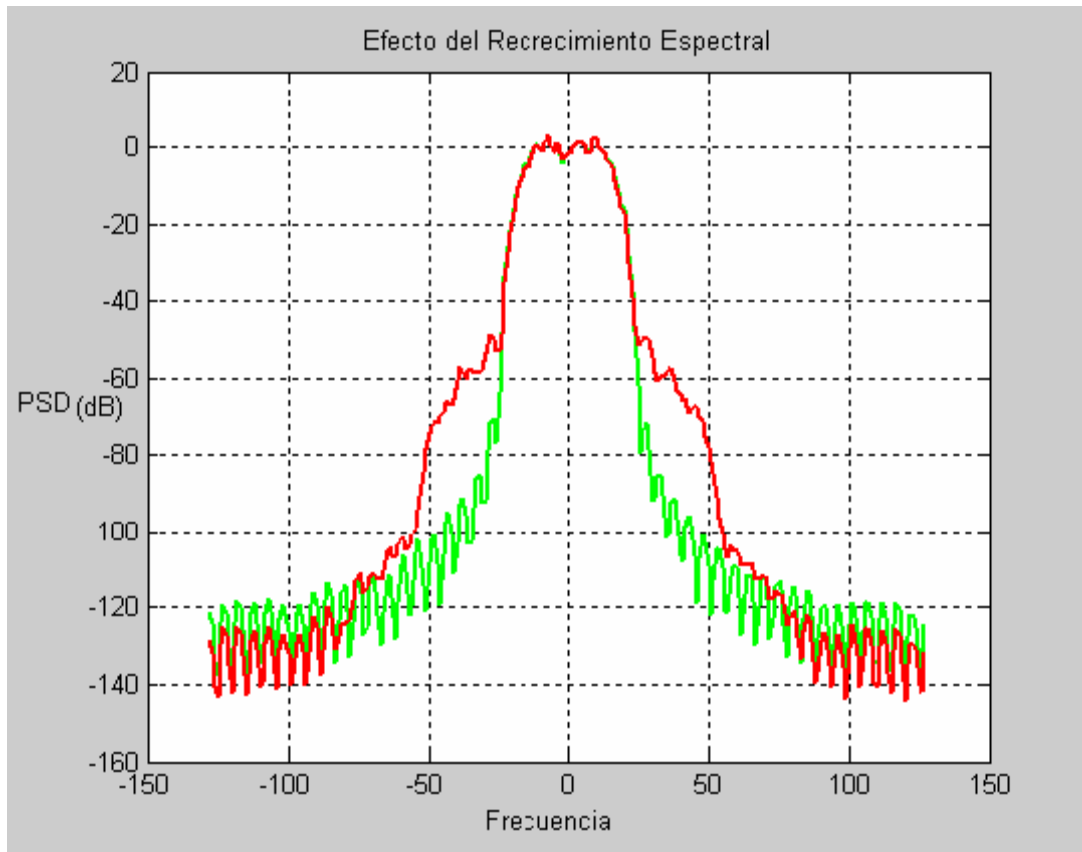


Figura 3.4: Efecto del recrecimiento espectral

Muestra la repercusión que tiene la distorsión no lineal en el espectro de una señal OFDM. En verde la señal sin distorsión. En rojo la señal a la salida de la no linealidad.

Cuando los niveles de potencia (de la señal de entrada) aumentan, la no linealidad provoca que el espectro se ensanche. La IMD no puede ser reducida filtrando, en general, porque está cerca de la frecuencia de la señal deseada. La problemática de este fenómeno radica en que la IMD de un usuario puede caer en el ancho de banda destinado a otro usuario cuyo ancho de banda, además, es bastante limitado. Recordemos en este punto que lo normal en comunicaciones actuales es tener un espectro superpoblado. En la siguiente figura exponemos esta situación:

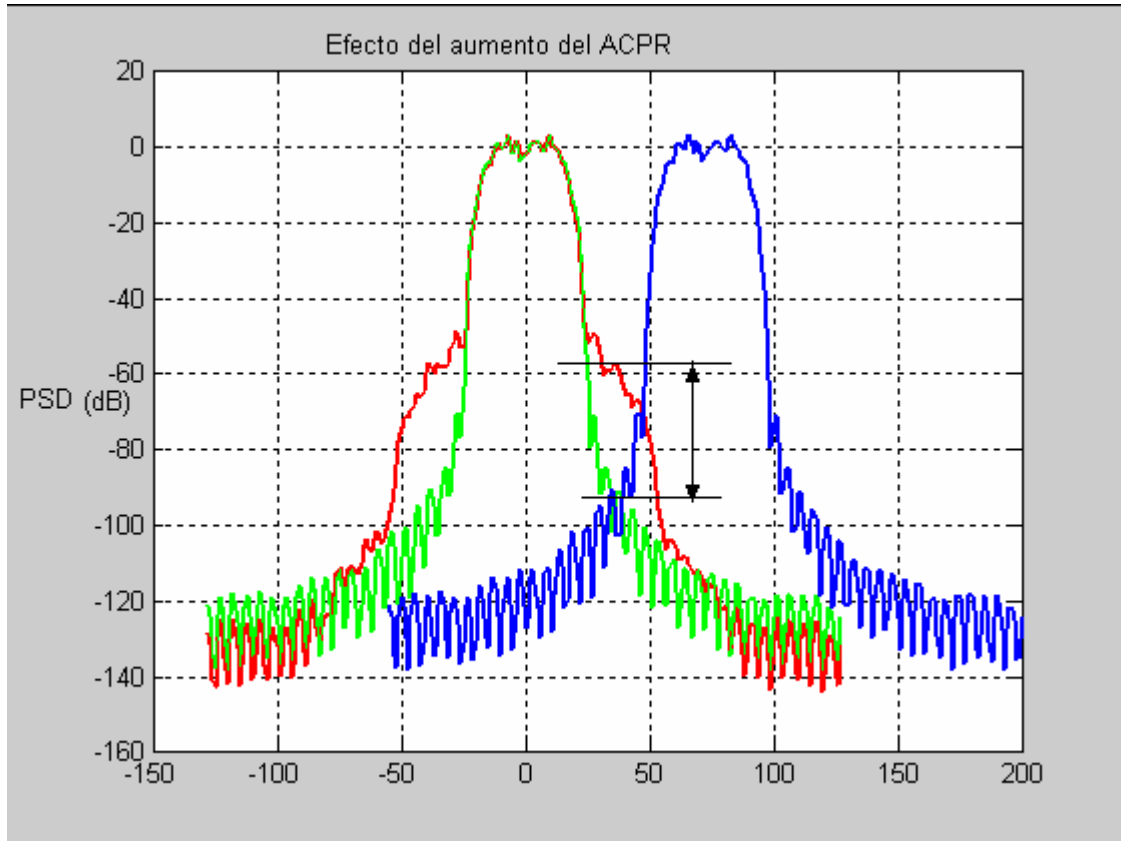


Figura 3.5: Efecto del aumento del ACPR

La Figura 3.5 muestra dos canales en verde y azul. Uno de ellos, al pasar por la no linealidad, ha aumentado sus niveles de potencia demasiado en una zona del espectro que corresponde al canal vecino, en rojo.

Como vemos, parte de la señal de un usuario se ha metido en la banda del espectro dedicada a otro usuario, lo que está provocando un aumento del ACPR. Recordemos que el ACPR (Adjacent Channel Power Rejection) se puede definir como:

$$ACPR = \frac{\int_{f_3}^{f_4} S(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} S(f) df} \quad (3.48)$$

donde $S(f)$ es el espectro de potencia de todo el espectro compartido por los usuarios; y f_1 y f_2 son las frecuencias de inicio y fin de la banda de un usuario, lo mismo que f_3 y f_4 son las frecuencias de inicio y fin del usuario vecino.

Existen métodos basados en estadística de la señal de entrada y en modelado de los dispositivos que predicen, en mayor o menor medida, el posible recrecimiento espectral de un sistema.

Por último, señalaremos que las autoridades reguladoras imponen reglas estrictas sobre la regeneración o recrecimiento espectral, que deben ser conocidas para que un producto nuevo concreto pueda ser aprobado. De nuevo, debido a la complejidad de los esquemas de modulación modernos, y especialmente el uso de técnicas multiportadora como OFDM, diseñar amplificadores que cubran tales especificaciones se pone cada vez más difícil.

3.2.3.3 Reducción de la eficiencia de la batería

Un impacto indirecto de la no linealidad es una reducción en la eficiencia y, por lo tanto, en la vida de la batería. Una definición común de la eficiencia es:

$$\eta = \frac{P_{RF}}{P_{DC}} \quad (3.49)$$

Por lo tanto, cuando aumenta la potencia de RF (P_{RF}) para una potencia de DC constante (P_{DC}) la eficiencia aumenta.

Sin embargo, esto también redundará en un aumento de la distorsión. Para cubrir especificaciones de distorsión, los diseñadores a menudo recurren a reducir la potencia de RF, que a su vez implica reducción de la eficiencia. El compromiso entre linealidad y eficiencia es evidentemente importante para el diseño de sistemas y circuitos de comunicación, siendo cada vez más importante con la evolución de los estándares.

3.2.4 Efecto de memoria

Los efectos de memoria se definen como cambios en la amplitud y en la fase de las componentes de distorsión causados por cambios en la frecuencia de modulación. Este efecto es particularmente importante para disminuir la distorsión, cuando ésta es reducida por una distorsión similar pero de fase contraria. Los efectos de memoria se

han considerado como un gran obstáculo a la hora de diseñar amplificadores lineales para wireless. La memoria, en este contexto, puede ser definida como una variación de las características de distorsión del amplificador con el ancho de banda de la señal. Estos efectos pueden producir que los niveles de intermodulación varíen con el ancho de banda de la señal, así como asimetrías entre los niveles de intermodulación superior e inferior. Por ello, estos efectos son denominados también efectos de distorsión dependiente del ancho de banda.

Los amplificadores han sido tradicionalmente modelados con una relación entrada-salida sin memoria, que puede ser escrita como:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (3.50)$$

donde los coeficientes son complejos.

Si se aplica una señal de dos tonos $x = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$, la amplitud para las bandas laterales intermodulación de tercer orden inferior y superior (IM3) se puede escribir como:

$$IM3 = \frac{3}{4} a_3 A^3 \quad (3.51)$$

donde se puede apreciar que IM3 es independiente del espaciado de los tonos.

Desafortunadamente, los amplificadores de potencia no se comportan de esta forma. Su conducta viene explicada con más detalle en la Figura 3.6, donde se muestra la fase del tono IM3 como función de la diferencia en frecuencia de una señal de dos tonos.

La ecuación (3.42) describe una línea recta como función de la diferencia entre tonos, como se observa en la línea azul de la Figura 3.6. La línea roja presenta la fase de la componente IM3 de un amplificador de potencia real. Tales limitaciones del ancho de banda de la modulación que son desviaciones de amplitud o de fase de las respuestas de Intermodulación (IM) causadas por la diferencia entre tonos de una señal de dos tonos

son llamadas Efectos de Memoria. Es importante enfatizar que la distorsión por sí misma no es un efecto de memoria, pero cualquier comportamiento de distorsión no constante a diferentes frecuencias de modulación (espaciado entre tonos) puede ser visto como uno.

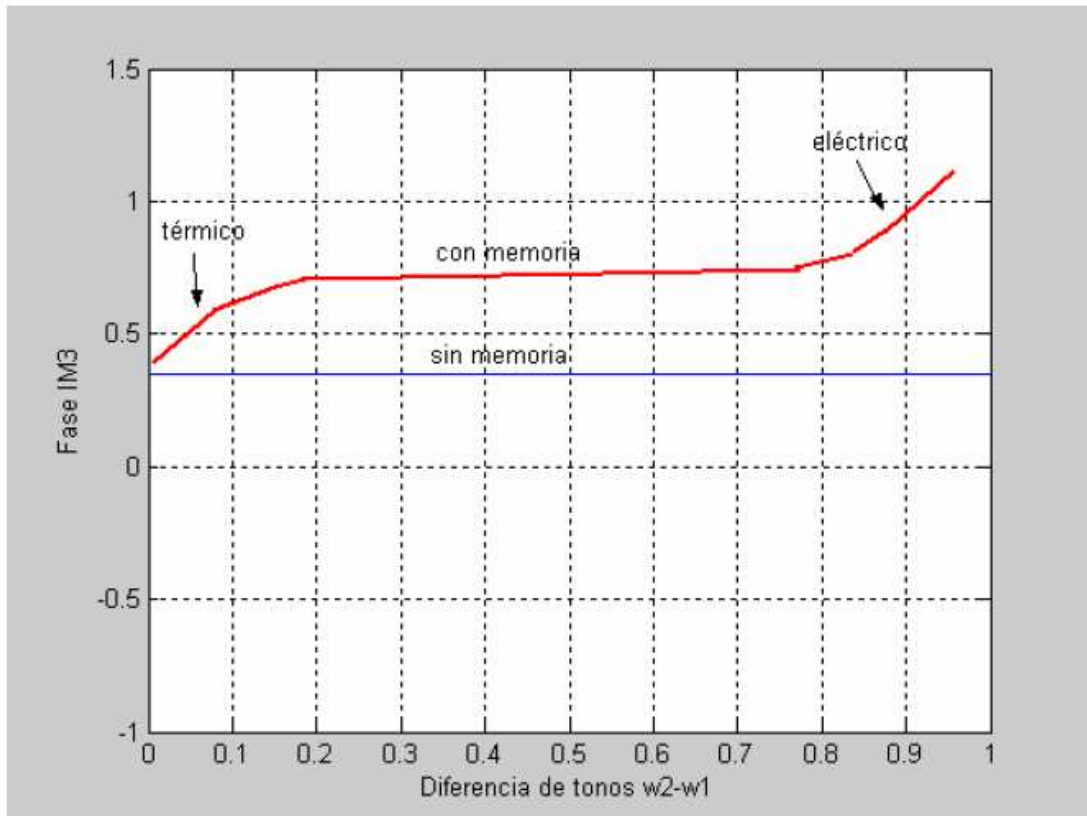


Figura 3.6: Efectos de la memoria en cuanto a la fase para IM3

Los efectos de memoria suaves no son perjudiciales para el propio amplificador de potencia. Una rotación de fase de 10-20 grados o un cambio de amplitud de menos de 0.5 dB no tienen efecto dramático en cuanto al ACPR se refiere. Sin embargo, la situación cambia cuando se usa linealización para cancelar las bandas laterales. La predistorsión, nuestro caso, es un método de linealización que produce componentes de señal que son de igual amplitud y fase contraria comparada con los productos de distorsión. Las señales de predistorsión suelen tener fase constante, por lo que es evidente que los efectos de memoria limitan seriamente el máximo rendimiento de este método. Desafortunadamente, los demás métodos de linealización también presentan el mismo efecto. Como consecuencia de ello, los efectos de memoria hacen que el uso de linealización no sea tan efectivo como podría ser en muchas aplicaciones.

La distorsión dependiente del ancho de banda (otra forma de referirse a los efectos de memoria) provoca algunos problemas importantes, tres de los cuales se describen a continuación:

1. El primero tiene que ver con la veracidad de lo expuesto en los datasheet de los fabricantes. Las medidas en las que se basan los fabricantes para la IMD normalmente viene determinada para un ancho de banda específico, sin tener en cuenta la dependencia que tiene el IMD con la separación en frecuencia, como hemos visto para IM3. Además, la IMD superior e inferior no son de la misma amplitud.
2. El segundo problema tiene que ver con el modelado. Los métodos de modelado tradicionales no tienen la capacidad de pronosticar la dependencia de la distorsión con el ancho de banda.
3. La consecuencia de la distorsión dependiente del ancho de banda está relacionada con la linealización. La reducción de la regeneración espectral se da cuando el ancho de banda de la señal es pequeño. Sin embargo, la mejora para la señal de banda ancha es muy mala. Esta incapacidad de los linealizadores de funcionar de forma correcta en el caso de señales de banda ancha es un problema serio en el desarrollo de sistemas de comunicaciones modernos.

3.2.4.1 Medidas de dos tonos

Una forma común de estudiar la distorsión por no linealidad y efectos de memoria es mediante las pruebas de dos tonos. Se trata de usar como señal de entrada para el dispositivo que queremos caracterizar, normalmente denominado DUT- Device Under Test, un coseno como señal portadora y otro como señal moduladora. De esta forma, como sabemos, el producto de los dos cosenos generará una señal suma de un coseno con frecuencia la suma de las frecuencia y otro coseno con frecuencia resta de las frecuencias, (3.52). Hay que decir que, si el generador que usamos nos permitiera generar directamente una señal suma de dos cosenos, el procedimiento sería igualmente válido. Con esta señal de entrada, al considerar el DUT como un polinomio, se

generarán los correspondientes productos de intermodulación de orden impar (pues los de orden par no caen en la banda de trabajo).

$$\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\cos((\omega_1 - \omega_2)t) + \frac{1}{2}\cos((\omega_1 + \omega_2)t) \quad (3.52)$$

Para cuantificar la distorsión por no linealidad, nos fijaremos en cómo aumenta la amplitud de los productos de intermodulación, generalmente los de orden 3 y 5 (IM3 y IM5), a medida que modificamos el espacio en frecuencia entre los dos tonos, y a medida que aumentamos la potencia de la señal de entrada. De igual forma, también podemos fijarnos en la fase de dichos productos de intermodulación.

Los efectos de memoria se perciben por la asimetría que presenta el espectro ante señales de dos tonos, en amplitud y fase; y cuando al aumentar la potencia de entrada, si la amplitud del producto de intermodulación superior era mayor que la del inferior, se produce el efecto inverso, es decir, ahora el superior será el de menor amplitud, y viceversa (recordemos que habrá productos de intermodulación superiores, los que tienen frecuencia mayor que los tonos, e inferiores, los que tienen frecuencia menor), Figura 3.7. Este efecto no sólo se percibe en señales de dos tonos, sino en la mayoría de los esquemas de modulación.

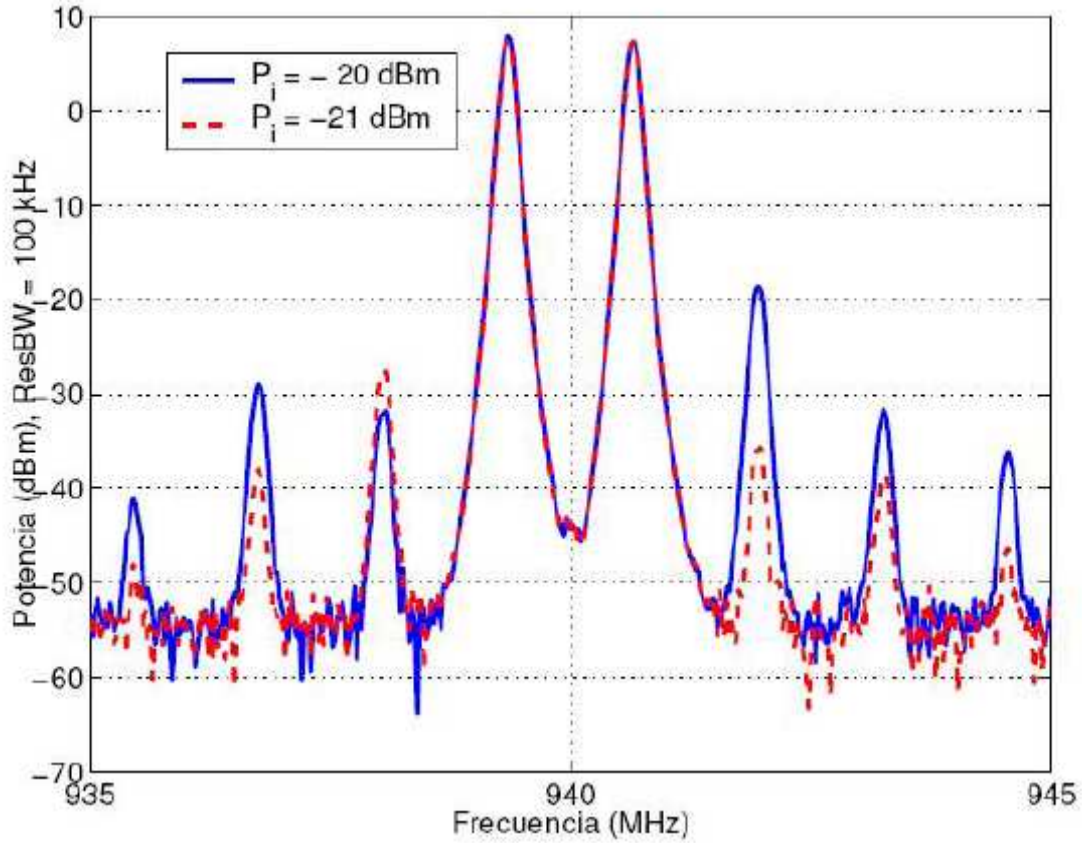


Figura 3.7: Resultado de una medida de dos tonos

En la Figura 3.7 podemos ver la asimetría, y cómo para distintas potencias de entrada, $P_i = -20$ dBm y $P_i = -21$ dBm, el IM3 superior pasa de ser mayor a menor que el IM3 inferior, lo que pone de manifiesto los efectos de memoria.

3.2.5 Input Back-Off y Output Back-Off

Un parámetro interesante que conviene conocer a la hora de trabajar con amplificadores en su región no lineal, es el punto de operación o back-off. Distinguiremos dos puntos de operación: de entrada (input back-off, IBO) y de salida (output back-off). Cada uno de ellos se define como:

$$IBO(dB) = 10 \log \left(\frac{P_{0,in}}{P_{in}} \right) \quad (3.53)$$

$$OBO(dB) = 10 \log \left(\frac{P_{0,out}}{P_{out}} \right) \quad (3.54)$$

donde P_{in} es la potencia media de la señal de entrada, P_{out} es la potencia media de la señal de transmitida, y $P_{o,out}$ y $P_{o,in}$ son la potencia de saturación (máxima que puede dar/recibir el amplificador) a la salida y a la entrada, respectivamente.

Los efectos de las no linealidades pueden ser reducidos trabajando con elevados back-off, lo que corresponde con mover el punto de operación del amplificador a la región lineal. Desafortunadamente, esto conlleva una pérdida de la eficiencia de potencia del HPA. En este contexto, una medida útil del modo de funcionamiento del sistema es la degradación total (TD), como función del OBO y del HPA:

$$TD(dB) = SNR(dB) - SNR_0(dB) + OBO(dB) \quad (3.55)$$

donde $SNR(dB)$ es la relación señal a ruido en dB requerida a la entrada del detector para obtener una BER determinada para un valor concreto de OBO, y $SNR_0(dB)$ es la relación señal a ruido en dB requerida para obtener la misma BER en ausencia de no linealidad.

El punto de operación óptimo (que conlleva la mejor relación entre la potencia de salida y degradación por distorsión no lineal) corresponde al $OBO(dB)$ que minimiza la función $TD(dB)$.

3.3 No linealidad en OFDM

La señal OFDM, modulada con un largo número de portadoras, es muy sensible a la distorsión no lineal debido a su gran variabilidad de la envolvente, la cual depende del valor de fase instantáneo de cada portadora. Debido al teorema central del límite, la señal compleja en banda base de OFDM puede ser modelada (para un alto número de portadoras independientes) como un proceso complejo Gaussiano con distribución Rayleigh de la envolvente. Esto permite un tratamiento analítico de los sistemas no lineales en OFDM haciendo uso de los resultados generales para distorsiones no lineales de señales Gaussianas.

Convertidores analógicos/digital, mezcladores y amplificadores de potencia son las más usuales fuentes de distorsión no lineal debido al limitado rango que permiten

para una señal dinámica. Es posible distinguir entre dos clases diferentes de distorsiones no lineales: primero, conocida como Cartesiana, actúa por separado sobre los componentes de banda de base de la señal compleja, mientras que el segundo tipo actúa en la envolvente compleja de la señal. La distorsión de los convertidores analógicos/digital es del primer tipo, mientras la distorsión AM/AM (distorsión de la amplitud que depende de la amplitud de entrada) y la distorsión AM/PM (distorsión de la fase que depende de la amplitud de entrada) es introducida por los amplificadores de potencia.

La distorsión no lineal en el transmisor causa interferencias tanto dentro de la banda de la señal como fuera de dicha banda. La interferencia dentro de la banda causa una degradación de la BER del sistema, mientras que la interferencia fuera de la banda de la señal afecta a las señales adyacentes que muchas veces, aunque la degradación de la BER es aceptable, la emisión puede ser intolerable.

En esta sección nos vamos a centrar en los efectos dentro de la banda de la señal. Más concretamente, en analizar un sistema OFDM que incluye un bloque paso de banda sin memoria no lineal en el transmisor como puede ser un amplificador de potencia, y llegar a una descripción teórica del efecto de la distorsión en el sistema de transmisión. Como resumen de esos resultados se puede decir que veremos como esta no linealidad tiene dos efectos sobre el sistema, por un lado la distorsión de los puntos de la constelación del sistema y la presencia de un ruido aditivo que llamaremos ruido de distorsión no lineal (NLD).

3.3.1 Formulación del problema

Primero vamos a introducir el esquema de bloques equivalentes de un sistema OFDM con no linealidad y un canal AWGN, mostrado en la Figura 3.8.

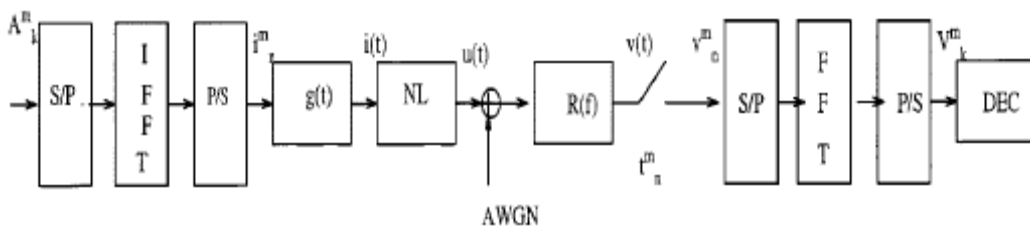


Figura 3.8: Sistema OFDM no lineal y canal AWGN

En cada periodo, un vector de N símbolos complejos, $A_k^m, k = 0, \dots, N-1$, es transformado por medio de una IFFT a un vector de N complejos símbolos, que son en realidad las muestras de la señal OFDM en banda de base. La envolvente compleja de la señal viene dada por $i(t)$:

$$i(t) = x(t) + jy(t) = \rho(t)e^{j\phi(t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} i_n^m g(t - nT - mNT) \quad (3.56)$$

donde i_n^m es obtenido como

$$i_n^m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k^m e^{jnk2\pi/N} \quad (3.57)$$

T es el periodo de símbolo y $g(t)$ es la forma del pulso. A_k^m pertenece a un alfabeto A de M elementos que tienen la misma probabilidad, los cuales dependen de la modulación adoptada, además se asume que por cada $k, h=0, \dots, N-1$, y por cada m y l

$$\begin{aligned} E[A_k^m] &= E[A_k^m A_h^l] = 0 \\ E[A_k^m A_h^l] &= \begin{cases} P & \text{si } h = k, m = l \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.58)$$

La señal modulada es transmitida a través de un canal no lineal sin memoria, NL, el cual es descrito por las características AM/AM y AM/PM distorsión. Esto puede ser también definido como las características de no linealidad de un amplificador de potencia, que será lo que simularemos en el siguiente capítulo. La señal a la salida del bloque NL es

$$u(t) = F_A[\rho(t)]e^{jF_P[\rho(t)]}e^{j\phi(t)} = F_I[x(t), y(t)] + jF_Q[x(t), y(t)] = F[x(t), y(t)] \quad (3.59)$$

donde $F_A[\cdot]$ y $F_P[\cdot]$ son las funciones de distorsión AM/AM y AM/PM.

En el receptor se introduce un ruido AWGN con densidad espectral de potencia N_0 . Se va a considerar que la interferencia en las bandas adyacentes causadas por el sistema de transmisión no va ser tenida en cuenta.

La señal recibida es primero procesada primero por un filtro paso de baja con función de transferencia $R(f)$ y muestreada en los instantes $t_n^m = nT + mNT$. Vamos a indicar la señal filtrada como $v(t)$ y sus muestras como $v_n^m = z_n^m + w_n^m$, donde z_n^m y w_n^m son las componentes útil y de ruido respectivamente. Las secuencias de muestras son procesadas trama por trama por el bloque FFT. En la entrada del decodificador se tendrá la variable de decisión

$$V_k^m = \sum_{n=0}^{N-1} v_n^m e^{-jnk2\pi/N} \quad (3.60)$$

la cual incluye la distorsión no lineal y el ruido Gaussiano.

La probabilidad de error de símbolo P_e puede ser evaluada considerando la probabilidad de error condicionada a la transmisión de cada símbolo del alfabeto de la modulación como sigue a continuación

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{A \in \mathcal{A}} \left(1 - \text{Prob}\{V_k^m \in S_A | A_k^m = A\} \right) \quad (3.61)$$

donde S_A es la región de decisión para el símbolo A . Esto requiere la característica estadística de la variable de decisión V_k^m , cuando A_k^m está fijo a A , lo cual veremos en el siguiente apartado.

3.3.2 Caracterización de la variable de decisión

Como se ha comentado anteriormente en este apartado vamos a intentar hallar las características estadísticas de la variable de decisión en el modulador para comprender el efecto de la no linealidad sobre el sistema OFDM.

➤ Señal a la entrada del bloque NL

Vamos a comenzar con una asunción básica con respecto a la señal $i(t)$ a la entrada del bloque no lineal. Mirando las Ecuaciones (3.56) y (3.57), $i(t)$ incluye por medio de los símbolos I_n^m , la suma de las N contribuciones las cuales son independientes y tienen las mismas estadísticas. Si N es suficientemente grande, $i(t)$ puede ser considerada como un proceso aleatorio complejo Gaussiano como consecuencia del teorema central del límite. Es más, el bloque IDFT, para valores altos de N , es considerado como un bloque el cual transforma un set de N variable aleatorias complejas independientes en un set de N variables aleatorias compleja Gaussianas.

Como se puede observar en la Ecuación (3.61), hay que considerar el proceso aleatorio $i(t)$ condicionado a la transmisión del símbolo genérico A_k^m fijado a A . Cuando A_k^m , para $m = \bar{m}$ y $k = \bar{k}$, está fija a A , el proceso aleatorio $i(t)$ no es estacionario. Su media viene dada por

$$\beta(t) = \beta_x(t) + j\beta_y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A}{N} e^{j2\pi \bar{k} / N} g(t - nT - \bar{m}NT) \quad (3.62)$$

y su varianza

$$\sigma^2(t) = \frac{P}{N} \sum_{m=-\infty}^{N-1} g^2(t - nT - mNT) - \frac{P}{A^2} |\beta(t)|^2 \quad (3.63)$$

Por otra parte, si nos fijamos en el análisis espectral, el símbolo $A_{\bar{k}}^{\bar{m}}$ fijo podría ser evitado y se tendría simplemente

$$\begin{aligned} \beta(t) &= 0 \\ \sigma^2(t) &= \frac{P}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} g^2(t - nT - mNT) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Notar que esto representa el límite que buscamos cuando indicamos que N es suficientemente grande. De hecho cuando N tiende a infinito, tanto $\beta(t)$ como $|\beta(t)|^2 / \sigma^2(t)$ tienden a cero.

➤ **Señal a la salida del bloque NL**

Ahora nos vamos a centrar en la salida del bloque no lineal $u(t)$. Nuestro primer objetivo es representarla esta salida como

$$u(t) = K(t)i(t) + d(t) \quad (3.65)$$

donde $d(t)$ es un término de ruido aditivo y $K(t)$ es una función arbitraria determinista compleja. Más exactamente, es deseable que la media de $d(t)$ sea cero, y que sea un proceso incorrelado con $i(t)$.

Teniendo esto en mente, nosotros podemos investigar la propiedades estadísticas de $d(t)$, evaluando su media y la correlación cruzada con el proceso $i(t)$:

$$E[d(t)] = E[u(t)] - K(t)E[i(t)] \quad (3.68)$$

$$E[d^*(t)i(t+\tau)] = E[u^*(t)i(t+\tau) - K^*(t)E[i^*(t)i(t+\tau)]] \quad (3.69)$$

donde $E[\cdot]$ denota el valor esperado.

Con ayuda de teoremas se puede llegar a la conclusión que si se da la condición

$$E\left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right] = -jE\left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right] \quad (3.70)$$

entonces

$$E[d^*(t)i(t+\tau)] = 0 \quad (3.71)$$

$$E[d(t)] = 0 \quad (3.72)$$

lo que quiere decir que $d(t)$ es un proceso no correlado con $i(t + \tau)$ de media cero. A partir de ahí se puede llegar a la siguiente expresión para $K(t)$

$$K(t) = \frac{1}{2} E \left[\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - j \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right] \quad (3.73)$$

Por tanto el punto más importante es verificar que se cumple la condición de la Ecuación 3.70. Para simplificar vamos a denotar por $\beta(t) = \beta(\text{real})$, $\sigma^2(t) = \sigma^2$, $\rho(t) = \rho$, $\phi(t) = \phi$, y $F_A(\rho)e^{jF_P(\rho)} = S(\rho)$. Realizando el cambio de coordenadas se obtiene

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = S'(\rho)(\cos^2 \phi + j \sin \phi \cos \phi) + \frac{S(\rho)}{\rho}(\sin^2 \phi - j \sin \phi \cos \phi) \quad (3.74)$$

$$-j \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = S'(\rho)(\sin^2 \phi - j \sin \phi \cos \phi) + \frac{S(\rho)}{\rho}(\cos^2 \phi + j \sin \phi \cos \phi) \quad (3.75)$$

La función densidad de probabilidad de las variables aleatorias ρ y ϕ es

$$f_{\rho\phi}(\rho, \phi) = \frac{\rho}{\pi\sigma^2} e^{-((\rho^2 + \beta^2 - 2\beta\rho \cos \phi)/\sigma^2)} \quad (3.76)$$

Sustituyendo 3.74 y 3.75 en 3.73 se obtiene

$$K(t) = \frac{1}{2} E \left[S'(\rho) + \frac{S(\rho)}{\rho} \right] \quad (3.77)$$

y en primera instancia se obtienen como conclusión que la Ecuación 3.70 no se verifica. Sin embargo cuando N es suficientemente grande y $\beta(t)$ es despreciable con respecto a $\sigma(t)$, la variable aleatoria ϕ llega a ser independiente respecto a la variable aleatoria ρ y uniformemente distribuida en el rango $(0, 2\pi)$. Haciendo que $K(t)$ tienda a $K_0(t) = K(t)|_{\beta(t)=0}$, la Ecuación 3.70 tiende a ser verdad y $E[d(t)]$ se hace prácticamente

nulo. Por lo tanto, en adelante, asumiremos que la Ecuación 3.70 es válida a condición de que N sea suficientemente grande.

Después de validar la posibilidad de descomponer la salida $u(t)$ en dos partes incorreladas (la parte de la señal útil y el ruido) como indica la Ecuación 3.65, ahora vamos a centrar la atención en la función $K_0(t)$ la cual caracteriza a la parte útil de la señal. Se puede notar que la función solo depende de la varianza $\sigma^2(t)$, la cual es función del tiempo t debido a la no estacionalidad del proceso aleatorio $i(t)$, esta dependencia del tiempo es introducida por la forma del pulso como se puede ver en la Ecuación 3.56.

Es interesante buscar la condición que hace $K_0(t)$ independiente del t , por ejemplo que la varianza $\sigma^2(t)$ sea una constante. Examinando la Ecuación 3.64 podemos ver que si el número de portadoras N es suficientemente grande, $\sigma^2(t)$ puede ser vista como una repetición periódica del pulso $g^2(t)$, de ahí, que sea una constante cuando las muestras de la transformada de Fourier de $g^2(t)$, $G_2(f) = G(f) * G(f)$, en la frecuencia n/t siendo n un entero, satisface la siguiente relación:

$$G_2(n/T) = \begin{cases} G_2(0) & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

Hay dos casos teóricos interesantes donde se cumple esta condición:

1. $g(t)$ es un pulso rectangular definido en el rango $(-T/2, T/2)$.
2. $G(f)$ es una función limitada en banda en el rango $(-1/2T, 1/2T)$.

Por tanto, hasta ahora hemos visto que la señal OFDM al pasar a través de un sistema no lineal se puede descomponer como indica la Ecuación 3.65 ya que N suele ser un número suficientemente grande y los pulsos empleados cumplen la relación anteriormente comentada.

Nos vamos a centrar en la relación 1 para obtener resultados numéricos. En el caso general, cuando el término $\sigma^2(t)$ es despreciable, la función compleja $K_0(t)$ puede ser representada como serie de Fourier por

$$K_0(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l e^{j2\pi l t / T} \quad (3.79)$$

donde

$$\alpha_l = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} K_0(t) e^{-j2\pi l t / T} dt \quad (3.80)$$

Por lo tanto, sustituyendo en 3.65, obtenemos

$$u(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l i(t) e^{j2\pi l t / T} + d(t) \quad (3.81)$$

Para los casos 1 y 2, se tiene $\alpha_0 \approx K_0$ y $\alpha_l \approx 0, l \neq 0$.

➤ Vector de salida del bloque FFT

Vamos a definir $g_{rl}(t), i_{rl}(t)$ y $d_r(t)$ como la respuesta del filtro del receptor a $g(t)e^{j2\pi l t / T}, i(t)e^{j2\pi l t / T}$ y $d(t)$ respectivamente. Asumiremos que el filtro del receptor está adaptado al pulso $g(t)$, por ejemplo $R(f) = G^*(f)/T$. La amplitud de $g(t)$ está fija a 1. Por tanto podemos escribir la salida del filtro del receptor como

$$z(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_l i_{rl}(t) + d_r(t) \quad (3.82)$$

En el caso 1 y 2 de la sección anterior la expresión anterior puede ser simplificada a

$$z(t) = \alpha_0 i_{r0}(t) + d_r(t) \quad (3.83)$$

Viendo esta ecuación podríamos tener otro caso interesante donde se cumple la Ecuación 3.83, aún cuando $\alpha_l \neq 0, l = 1, \dots, \infty$. Este caso se refiere a un sistema donde $G(f)R(f)$ es una función limitada en banda en el rango $[-B, B]$, $1/2T < B < 1/T$ y portadoras virtuales son insertadas para evitar el efecto del aliasing. Un efecto de interés práctico, lo llamaremos caso 3, es un sistema con $G(f)R(f) = CR(f)$, es la función coseno alzado con factor de rolloff b . En ese caso cuando N es suficientemente grande, la componentes espectrales de $i(t)$ que salen del rango $[-1/2T, 1/2T]$ son despreciables. De ahí que el filtro del receptor elimina su contribución de las componentes con índice $l \neq 0$ y a la salida del filtro se tiene la Ecuación 3.83.

Vamos a centrar el estudio en estos tres casos que además son los más habituales. Muestreando $z(t)$ en el instante $t_n^{\bar{m}}$ se obtiene

$$z_n^{\bar{m}} = \alpha_0 i_{r0n}^{\bar{m}} + d_{rn}^{\bar{m}} \quad (3.84)$$

donde

$$i_{r0n}^{\bar{m}} = \sum_{m=-\infty}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} i_s^{\bar{m}} g_{r0}(t_n^{\bar{m}} - sT - mNT) = i_n^{\bar{m}} g_{r0}(0) = i_n^{\bar{m}} \quad (3.85)$$

A la salida del bloque FFT después de fijar $A_k^{\bar{m}} = A$

$$V_k^{\bar{m}} = \alpha_0 A + D_k^{\bar{m}} + W_k^{\bar{m}} \quad (3.86)$$

donde $W_k^{\bar{m}}$ es la componente de ruido Gaussiano de varianza $\sigma_w^2 = N\sigma_\omega^2 = 2NN_0/T$, y

$$D_k^{\bar{m}} = \sum_{n=0}^{N-1} d_{rn}^{\bar{m}} e^{-jn\bar{k}2\pi/N} \quad (3.87)$$

es la componente de ruido introducida por la no linealidad de varianza σ_D^2 . Esta ecuación, consecuencia del teorema de Bussgang, indica que el efecto de los bloques no

lineales sin memoria en las señales que son obtenidas como suma de muchas componentes independientes (en nuestro caso que N sea suficientemente grande), producen una rotación en el receptor en la constelación, una atenuación y un ruido incorrelado. Esto es la consecuencia diferente respecto a un sistema con una única portadora, ya que en esos casos se produce una compresión y un ruido correlado.

Por tanto podemos concluir que el efecto de una no linealidad sin memoria paso de banda en la variable de decisión de un sistema OFDM puede ser descrita introduciendo una ganancia compleja α_0 que incluye una atenuación y una rotación de fase, y un término de ruido aditivo Gaussiano NLD de media cero y varianza σ_D^2 .

3.3.3 Evaluación de la probabilidad de error

Comenzando desde la expresión de la variable de decisión en la entrada del bloque de decisión dado por 3.86, podemos evaluar la probabilidad de error como función de la modulación utilizada y la relación SNR

$$\frac{S}{N} = \frac{|\alpha_0|^2}{\sigma_w^2 + \sigma_D^2} \quad (3.88)$$

como sigue a continuación:

$$P_b = f(\text{modulación}, S/N) \quad (3.89)$$

Se puede derivar una expresión para varios formatos de modulación como puede ser M-QAM, M-PSK, etc. En este caso nos vamos a centrar en M-QAM la cual es una modulación de amplitud y fase. En ese caso, los M-arios símbolos son obtenidos mapeando grupos de $\log_2 M$ bits, de ahí que se pueda derivar la siguiente expresión:

$$P_b = \frac{2}{\log_2 M} \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \text{erfc} \sqrt{\frac{|\alpha_0|^2}{\sigma_w^2 + \sigma_D^2}} \quad (3.90)$$

Aquí, la S/N en la raíz cuadrada depende del punto de trabajo del amplificador de potencia y es también función de E_b / N_0 , donde

$$E_b = \frac{1}{2} E[u(t)^2] \frac{T}{\log_2 M} = \left[2 \frac{|\alpha_0|^2}{N} \frac{M-1}{3} + \sigma_d^2 \right] \frac{T}{2 \log_2 M} \quad (3.91)$$

es la energía por bit de la señal a la salida del bloque no lineal. Observando la Ecuación 3.90 se puede ver que hay un límite para la probabilidad de error que no se puede reducir, ya que aunque el canal fuera ideal y no introdujera ruido tendríamos una probabilidad de error

$$P_{b_{floor}} = \frac{2}{\log_2 M} \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{|\alpha_0|^2}{\sigma_D^2}} \quad (3.92)$$

la cual depende de la relación señal ruido no lineal $|\alpha_0|^2 / \sigma_D^2$.