

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Análisis numérico y validación analítica del  
ensayo Single Lap Joint en presencia de no  
linealidades geométricas.

Autor: Palma Muñoz Rodríguez

Tutor: Luis Arístides Távara Mendoza, María del Mar Muñoz-Reja  
Moreno

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de  
Estructuras, Grupo de Elasticidad y Resistencia de  
Materiales  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2025





Trabajo Fin de Grado  
Grado en Ingeniería Aeroespacial

**Análisis numérico y validación analítica del  
ensayo Single Lap Joint en presencia de no  
linealidades geométricas.**

Autor:

Palma Muñoz Rodríguez

Tutor:

Luis Arístides Távara Mendoza, María del Mar Muñoz-Reja Moreno

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras, Grupo  
de Elasticidad y Resistencia de Materiales  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2025



Trabajo Fin de Grado: Análisis numérico y validación analítica del ensayo Single Lap  
Joint en presencia de no linealidades geométricas.

Autor: Palma Muñoz Rodríguez

Tutor: Luis Arístides Távara Mendoza, María del Mar Muñoz-Reja Moreno

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



# Agradecimientos

---

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis tutores, María del Mar Muñoz, Luis Távara y Jose Luis Guzmán por todo lo que me han enseñado durante este tiempo. Sus conocimientos, su paciencia y la confianza que han depositado en mí han sido de un valor incalculable para poder llevar a cabo este trabajo y, sin duda, serán fundamentales en mis próximos pasos dentro de la ingeniería.

También quiero dar las gracias a mis amigos, tanto de dentro como de fuera de la universidad, por su apoyo constante. Haciendo una mención especial a aquellos con los que he compartido el día a día en la Escuela, que han hecho de este largo camino algo mucho más llevadero.

Por último, y más importante, a mi familia. Especialmente a mis padres, por darme la oportunidad de estudiar en esta preciosa ciudad y por confiar en mí incluso en aquellos momentos en los que yo misma dudaba. Sin su apoyo incondicional, nada de esto habría sido posible.

*Palma Muñoz Rodríguez*

*Sevilla, 2025*



# Resumen

---

El uso de materiales compuestos en la industria aeronáutica y en otros sectores de ingeniería estructural exige un conocimiento profundo de sus mecanismos de fallo. Uno de los aspectos más relevantes es el comportamiento de las uniones adhesivas, esenciales para garantizar la integridad de estructuras ligeras y de elevada eficiencia. En este contexto, el presente Trabajo Fin de Grado aborda el estudio del ensayo de unión a solape simple (SLJ) mediante simulaciones con el software de elementos finitos Abaqus, con el objetivo de comparar los resultados numéricos con soluciones analíticas disponibles en la literatura.

Adicionalmente, se ha implementado una subrutina externa al programa (UINTER), desarrollada en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla por la profesora M.Mar Muñoz-Reja, que permite caracterizar la interfase mediante distintos criterios de fallo. Además, se han implementado modelos y criterios también desarrollados en la escuela que han permitido evaluar con mayor detalle la distribución de tensiones en la unión y analizar los posibles modos de daño en condiciones de carga específicas.

Los resultados obtenidos contribuyen a la validación de modelos analíticos y ponen de manifiesto la importancia de integrar criterios avanzados de fallo en la simulación de uniones adhesivas de materiales compuestos, con el fin de mejorar la predicción de su comportamiento estructural.



# Abstract

---

The use of composite materials in the aerospace industry and other structural engineering sectors requires a thorough knowledge of their failure mechanisms. One of the most relevant aspects is the behaviour of adhesive joints, which are essential to ensure the integrity of lightweight and highly efficient structures. In this context, the present Bachelor's Thesis addresses the study of the single-lap joint (SLJ) test through simulations performed with the finite element software Abaqus, with the aim of comparing the numerical results with analytical solutions available in the literature.

Additionally, an external subroutine (UINTER) has been implemented, developed at the “*Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla*” by the professor M.Mar Muñoz-Reja, allowing the characterization of the interface through different failure criteria. Moreover, additional models and criteria also developed at the school have been incorporated, enabling a more detailed evaluation of the stress distribution in the joint and the analysis of possible damage modes under specific loading conditions.

The results obtained contribute to the validation of analytical models and highlight the importance of integrating advanced failure criteria in the simulation of adhesive joints in composite materials, in order to improve the prediction of their structural behavior.



# Índice

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Notación y Abreviaturas</i>	XI
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos	3
<b>2 Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1 Materiales Compuestos	5
2.1.1 Clasificación	6
2.1.2 Propiedades	7
2.2 Unión Fibra-Matriz	10
2.3 Uniones en Materiales Compuestos	10
2.3.1 Uniones Adhesivas	10
Unión a Solape Simple- SLJ	11
2.3.2 Uniones Mecánicas (Remachadas o Atornilladas)	13
2.3.3 Uniones Soldadas	13
2.4 Mecánica de la Fractura	14
2.4.1 Mecánica de la Fractura Elástica Lineal	14
Teoría de Griffith	15
Teoría de Irwin	15
2.4.2 Mecánica de la Fractura De La Interfase	17
LEBIM	17
MECÁNICA DE LA FRACTURA FINITA	22
<b>3 Subrutina UINTER</b>	<b>31</b>
3.1 ¿Qué es una UINTER?	31
3.1.1 Archivo ODB	31
3.2 Variables, Propiedades del material y Salidas UINTER	33
3.3 Implementación en código de la UINTER	35
3.4 Ejecución automatizada del análisis con Subrutina UINTER	40
3.5 Implementacion de CCFM+LEBIM según PMTE-SC	40
<b>4 Resultados Numéricos</b>	<b>41</b>
4.1 Estudio de Convergencia	41
4.1.1 Criterio de Evaluación	42

4.1.2	Definición de los Estudios Realizados	42
4.1.3	Configuración de los Estudios Realizados	43
4.1.4	Características de las mallas	45
4.1.5	Resultados del Estudio de Convergencia	48
4.2	Análisis de las tensiones en la zona de solape	51
4.2.1	Tensiones frente al aumento de la Carga Aplicada	51
4.2.2	Tensiones a lo largo del solape para distintas Cargas	52
4.2.3	Curvas $k-\xi_c$	53
4.2.4	Deflexión transversal en el solape	54
<b>5</b>	<b>Resultados Analíticos</b>	<b>55</b>
5.1	Estudio en Wolfram	55
5.2	Resultados Analíticos	59
5.2.1	Tensiones frente al aumento de la Carga Aplicada	59
5.2.2	Tensiones a lo largo del solape para distintas Cargas Aplicadas	60
<b>6</b>	<b>Comparación de Resultados Numéricos-Analíticos</b>	<b>61</b>
6.1	Solape Largo	62
6.1.1	Tensiones Máximas frente al aumento de Carga Aplicada	62
6.1.2	Tensiones Normales a lo largo del solape para distintas cargas aplicadas	63
6.1.3	Tensiones Tangenciales a lo largo del solape para distintas cargas aplicadas	65
6.2	Estudio Adicional: Solape Corto	68
<b>7</b>	<b>Comparación de Resultados Numéricos-Numéricos Tsai</b>	<b>71</b>
7.1	Solape Largo	71
7.1.1	Comparación Distribución de Tensiones Normales a lo largo del solape	71
7.1.2	Comparación Distribución de Tensiones Tangenciales a lo largo del solape	72
7.1.3	Curvas $k$ vs $\xi_c$	73
7.2	Estudio Adicional: Solape Corto	74
7.2.1	Comparación Distribución de Tensiones Normales a lo largo del solape	74
7.2.2	Comparación Distribución de Tensiones Tangenciales a lo largo del solape	75
<b>8</b>	<b>Comparación de Resultados Numéricos de referencia - Analíticos</b>	<b>77</b>
8.1	Solape Largo	77
8.1.1	Comparación Distribución de Tensiones Normales a lo largo del solape	77
8.1.2	Comparación Distribución de Tensiones Tangenciales a lo largo del solape	78
<b>9</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>10</b>	<b>Posibles Mejoras y Próximos Pasos</b>	<b>81</b>
<b>Anexo A</b>	<b>Subrutina UINTER</b>	<b>83</b>
A.1	Código Principal	83
A.2	Ejecución del Código Principal	90
<b>Anexo B</b>	<b>Estudio en Wolfram</b>	<b>93</b>
	<i>Índice de Figuras</i>	97
	<i>Índice de Tablas</i>	99
	<i>Índice de Códigos</i>	101

---

*Bibliografía*

103



# Notación y Abreviaturas

---

## Abreviaturas

<b>MFEL</b>	Mecánica de la Fractura Elástica Lineal
<b>MZC</b>	Modelo de Zona Cohesiva Cohesive Zone Model
<b>MEF</b>	Método de los Elementos Finitos Finite Element Method
<b>LEBIM</b>	Modelo de interfase Lineal Elástica Frágil Linear Elastic Brittle Interface Model
<b>ERR</b>	Tasa de Liberación de Energía Energy Release Rate
<b>LEFM</b>	Mecánica de Fractura Lineal Elástica Linear Elastic Fracture Mechanics
<b>FFM</b>	Mecánica de la Fractura Finita Finite Fracture Mechanics
<b>CCFFM</b>	Criterio Acoplado de la Mecánica de la Fractura Finita Coupled Criterion of Finite Fracture Mechanics
<b>PMTE</b>	Principio de Mínima Energía Total Principle of Minimum Total Energy
<b>UINTER</b>	interfase Diseñada por el usuario User-Defined Interface
<b>UMAT</b>	Subrutina de material de usuario User Material Subroutine
<b>IP</b>	Punto de Integración Integration Point
<b>CC</b>	Condiciones de Contorno
<b>SLJ</b>	Unión a Solapa Simple Single Lap Joint
<b>PSC</b>	Criterio puntual Point Stress Criterion
<b>ASC</b>	Criterio promediado Average Stress Criterion
<b>ODB</b>	Output Database

## Notación

$a$	Longitud de grieta
$E$	Módulo de Young
$G$	Tasa de liberación de energía (ERR)
$G_c$	Tenacidad a la fractura
$G_I$	Tasa de liberación de energía en Modo I
$G_{Ic}$	Tenacidad a la fractura en Modo I puro
$G_{II}$	Tasa de liberación de energía en Modo II
$G_{IIc}$	Tenacidad a la fractura en Modo II puro
$h_a$	Espesor de la interfase fibra–matriz
$K$	Factor de intensidad de tensiones (SIF)
$K_I$	Factor de intensidad de tensiones en Modo I
$K_{II}$	Factor de intensidad de tensiones en Modo II
$K_{III}$	Factor de intensidad de tensiones en Modo III
$k_n$	Rigidez normal del muelle de interfase
$k_t$	Rigidez tangencial del muelle de interfase
$U$	Energía de deformación total
$\Gamma$	Interfase fibra–matriz (contorno)
$\gamma$	Número/parámetro de fragilidad
$\Delta$	Incremento o variación
$\delta$	Desplazamiento relativo entre puntos opuestos de la interfase
$\delta_n$	Desplazamiento relativo normal
$\delta_{nc}$	Desplazamiento relativo normal crítico
$\delta_t$	Desplazamiento relativo tangencial
$\delta_{tc}$	Desplazamiento relativo tangencial crítico
$\varepsilon$	Tensor deformación
$\varepsilon_n$	Deformación normal
$\varepsilon_{nc}$	Deformación normal crítica
$\varepsilon_t$	Deformación tangencial
$\varepsilon_{tc}$	Deformación tangencial crítica
$\theta_d$	Semiángulo de detención tras crecimiento inestable de grieta
$\lambda \equiv \lambda_{HS}$	Parámetro de sensibilidad al modo de fractura de Hutchinson–Suo
$\lambda_1$	Parámetro de Lamé
$\mu$	Parámetro $\mu$ (Cornetti)
$\mu_I$	Parámetro $\mu$ asociado al Modo I de fractura
$\mu_{II}$	Parámetro $\mu$ asociado al Modo II de fractura
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Densidad
$\sigma$	Tensor de tensiones
$\sigma$	Tensión normal
$\sigma_c$	Resistencia a compresión
$\tau$	Tensión tangencial (cortante)
$\psi$	Ángulo de combinación de modos de fractura (genérico)
$\psi_u$	Ángulo de combinación de modos (forma en desplazamientos)

---

$\psi_\sigma$	Ángulo de combinación de modos (forma en tensiones)
$\langle \cdot \rangle_\pm$	Parte positiva (negativa) de un número real



# 1 Introducción

---

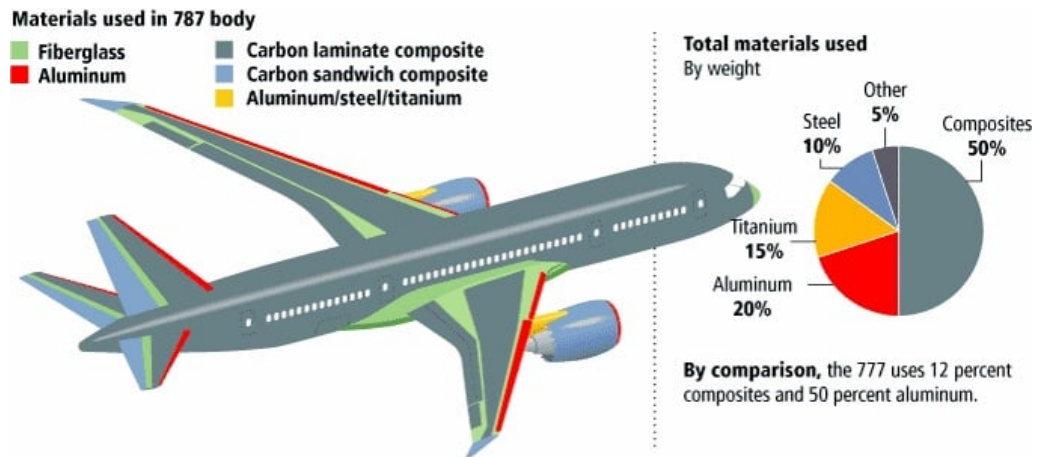
*“Un material compuesto es como un equipo bien entrenado: cada parte tiene sus propias habilidades, pero juntas logran algo mucho más grande que la suma de sus partes. Son combinaciones de materiales diseñadas para aprovechar lo mejor de cada uno, como fibras que aportan resistencia y una matriz que les da cohesión. Desde las alas de los aviones hasta los cascos espaciales, estos materiales nos permiten desafiar los límites de la ingeniería.”*

Richard Feynman, físico teórico estadounidense.

La ineludible sustitución de materiales convencionales por materiales compuestos en diversos ámbitos de aplicación tecnológica convierte el conocimiento riguroso de estos últimos en una prioridad para la ciencia y la investigación contemporáneas. La necesidad de esta transición se manifiesta con particular evidencia en múltiples sectores industriales:

- En el ámbito aeroespacial, la implementación de fibras de carbono con matriz epoxi en reemplazo de aleaciones metálicas tradicionales representa una innovación de considerable trascendencia, dado que estos materiales compuestos proporcionan una significativa reducción de masa estructural, simultáneamente con una superior resistencia a los fenómenos de fatiga y a los procesos corrosivos, optimizando así los parámetros de rendimiento y longevidad de las aeronaves.
- La industria automotriz constituye otro escenario donde la sustitución de aceros convencionales por componentes fabricados en fibra de carbono y polímeros reforzados adquiere relevancia estratégica. Esta transformación material posibilita una mejora sustancial en la capacidad de absorción energética ante impactos, incrementando los índices de seguridad, así como una optimización en la eficiencia del consumo de combustible derivada de la reducción ponderal de la estructura vehicular.
- En el sector de la construcción, la disminución del empleo de materiales tradicionales, como la madera, cuya función es asumida por composites de fibra de vidrio y polímeros reforzados, facilita una notable reducción en los requerimientos de mantenimiento periódico y una prolongación significativa de la vida útil de las estructuras edificadas.

Los casos mencionados constituyen únicamente una muestra representativa del vasto espectro de aplicaciones y ventajas que los materiales compuestos ofrecen en la actualidad, evidenciando su carácter transformador en la ingeniería de materiales y su proyección como elementos fundamentales del desarrollo tecnológico futuro.



**Figura 1.1** Porcentaje de Materiales Compuestos presentes en el B787 [2].



**Figura 1.2** Alerón de coche de carreras fabricado de Material Compuesto [17].



**Figura 1.3** Aplicación de Materiales Compuestos en el ámbito de la edificación [3].

Pese a todas las ventajas que se acaban de presentar, resulta evidente que su no-uso generalizado responde a que también presentan serios inconvenientes.

Entre las principales desventajas que caracterizan a los materiales compuestos destacan sus elevados costes de producción, que frecuentemente exceden con amplio margen a los de materiales convencionales. Adicionalmente, los procesos de fabricación resultan considerablemente más complejos, demandando tecnologías específicas y personal altamente especializado. La anisotropía inherente a muchos compuestos genera comportamientos mecánicos heterogéneos según la dirección de aplicación de las cargas, lo que complica notablemente su caracterización y modelización.

La degradación ambiental constituye otro factor de preocupación. Numerosos compuestos, especialmente aquellos con matrices poliméricas, experimentan deterioros acelerados ante la exposición a radiación ultravioleta, humedad, temperaturas extremas o agentes químicos. Asimismo, los métodos de unión entre componentes de materiales compuestos y las técnicas de reparación ante daños no han alcanzado un nivel de confiabilidad equiparable al de materiales tradicionales.

Es precisamente la existencia de estas limitaciones lo que convierte a los materiales compuestos en un campo de investigación que se mantiene en auge. La necesidad de comprender en mayor profundidad su comportamiento mecánico, desarrollar teorías predictivas fiables sobre su mecánica de fractura, optimizar sus procesos productivos para reducir costes, y mejorar su durabilidad y sostenibilidad, constituyen desafíos científicos que continúan estimulando la innovación y el desarrollo de conocimiento especializado en este ámbito.

## 1.1 Objetivos

En el presente Trabajo Fin de Grado se aborda el estudio de uniones adhesivas del tipo Single Lap Joint (SLJ) mediante el empleo combinado de técnicas analíticas y numéricas. Para ello, se desarrolla un doble enfoque: por un lado, la obtención de soluciones analíticas a través de un código implementado en Wolfram Mathematica, en el que se recogen formulaciones clásicas como las de Goland & Reissner [22]; y por otro, la utilización del software de elementos finitos *ABAQUS* para la obtención de dichos resultados numéricamente.

En el entorno numérico, se recurre además a la implementación de una subrutina *UINTER*. Esta herramienta permite modelar la interfase adhesiva mediante un enfoque de muelles elásticos siguiendo el modelo *LEBIM* (Linear Elastic Brittle Interface Model), desarrollado en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla y entendido como una adaptación del modelo de Prandtl [6]. Gracias a esta formulación, es posible capturar de manera más precisa el comportamiento de la unión adhesiva y se puede obtener resultados que se ajusten mejor a las soluciones analíticas de referencia.

Como parte esencial de la metodología, se llevará a cabo un estudio de convergencia de malla, que permita garantizar la validez y robustez de los resultados obtenidos. Asimismo, se evaluarán los errores relativos entre los modelos numéricos y analíticos, analizando parámetros de interés tales como la distribución de tensiones en la unión o la evolución del momento resultante con el incremento de la carga aplicada.

De este modo, los objetivos de este trabajo consisten no solo en validar las soluciones analíticas clásicas mediante simulación numérica, sino también poner de manifiesto la utilidad de integrar modelos avanzados de interfase en el análisis de uniones adhesivas, con el fin de aportar un marco de mayor realismo y aplicabilidad en el ámbito de la ingeniería estructural con materiales compuestos.



## 2 Marco Teórico

---

**E**n el presente capítulo se presentarán distintos conceptos de interés que tendrán una considerable relevancia para el desarrollo del proyecto. En primer lugar, se introducen aspectos generales sobre los materiales compuestos, su clasificación y los mecanismos de fallo más habituales. Posteriormente, se expone una visión preliminar sobre las uniones adhesivas, cuyo estudio resulta esencial para comprender la problemática estructural que se aborda.

Más adelante en este mismo capítulo, se explicarán algunos criterios fundamentales de la Mecánica de la Fractura, que servirán como marco teórico para el análisis del comportamiento de las uniones. Asimismo, se introducirán las bases de los modelos en los que se apoya el presente trabajo, entre los que destacan el LEBIM (Linear Elastic Brittle Interface Model), el CCFFM (criterio combinado de fallo de la fractura), y el Principio de Mínima Energía en presencia de condiciones tensionales y no linealidades geométricas.

### 2.1 Materiales Compuestos

*“Una combinación macroscópica de dos o más materiales distintos, con una interfase reconocible entre ellos, que actúan sinérgicamente para lograr propiedades que ninguno de los componentes podría alcanzar por sí solo, creando así un sistema que explota las virtudes de sus constituyentes mientras minimiza sus deficiencias individuales.”*

Dr. Merton C. Flemings, Massachusetts Institute of Technology (MIT)

Como bien se describe en la definición anterior, un material compuesto, a escala macroscópica, se define como una combinación de componentes de distinta naturaleza, insolubles entre sí, que pueden ser identificados por medios físicos. En estos materiales existen tres fases: una fase continua, la matriz; una fase discontinua, la fibra o refuerzo; y la fase intermedia que se encuentra entre ellos, la interfase. Mediante esta combinación se consigue obtener unas propiedades que no son alcanzables de forma aislada, consiguiendo una propiedad denominada “sinergia”. La sinergia hace referencia al efecto conjunto de los distintos componentes.

2.1.1 Clasificación

Resulta complejo seleccionar una clasificación universalmente válida de los materiales compuestos. Esto es debido a que al seleccionar una de ellas se resaltan algunas propiedades y se obvian otras. Se ha seleccionado la clasificación que se puede encontrar en [5] que detalla que los materiales compuestos pueden ser clasificados principalmente según la geometría del refuerzo introducido en el material base, la matriz, mecanismo que determina la mejora de propiedades mecánicas como resistencia, rigidez o tenacidad.

Esta clasificación 2.1 distingue entre materiales compuestos de partículas y materiales compuestos reforzados con fibra.

En los primeros, las **partículas** (esféricas, cúbicas, laminares o irregulares) generalmente no absorben gran parte de la carga ni mejoran significativamente la resistencia, pero sí otras propiedades como conductividad térmica y eléctrica, comportamiento a alta temperatura, resistencia a la abrasión o dureza.

Por su parte, los materiales compuestos **reforzados con fibra**, donde una dimensión es mucho mayor que las otras dos, presentan excelentes propiedades mecánicas debido a la reducción de defectos en los filamentos. Estos pueden clasificarse en compuestos de **una sola capa** o **multicapa**, y según la longitud de la fibra en **continuos** o **discontinuos**. Los laminados, formados por distintas láminas con diferentes orientaciones, son los más comunes en aplicaciones estructurales de ingeniería, pudiendo ser híbridos cuando incorporan diferentes materiales constituyentes. Para encontrar más información acerca de esta clasificación, está disponible en [18].

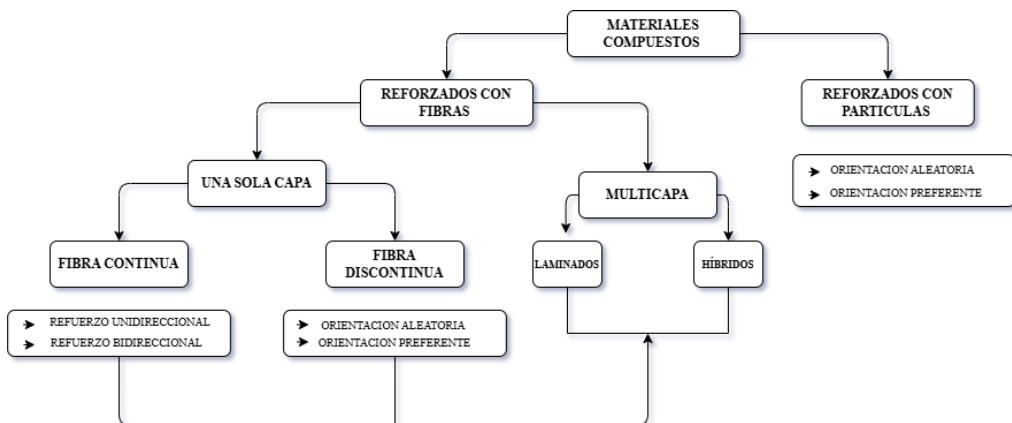


Figura 2.1 Clasificación de los Materiales Compuestos.

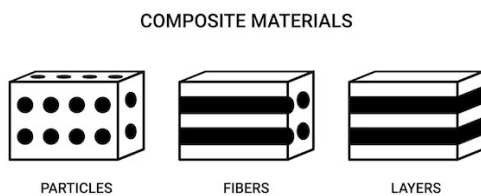


Figura 2.2 Representación Fibras-Partículas [19].

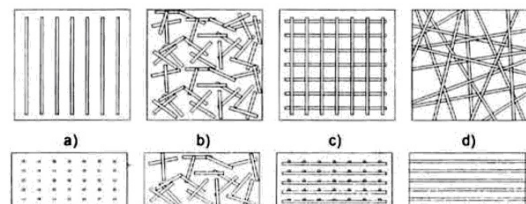


Figura 2.3 a) Fibras continuas unidireccionales, b) Fibras cortas aleatorias, c) Tejido bidireccional, d) Laminado Multidireccional [20].

### 2.1.2 Propiedades

En esta ocasión, se procede a detallar las características de los materiales compuestos **reforzados con fibras**, los más empleados en aplicaciones ingenieriles, ya que mejoran las propiedades en dirección longitudinal de la fibra.

#### FIBRAS

Las fibras más utilizadas en materiales compuestos, como el carbono, el vidrio y el Kevlar, presentan características distintivas que las hacen adecuadas para diversas aplicaciones, exhibiendo una amplia gama de propiedades mecánicas significativamente superiores a los materiales estructurales convencionales.

Las **fibras de carbono**, con su estructura basada en grafito y diámetros de 7 a 8  $\mu\text{m}$ , destacan por la combinación de rigidez y resistencia, aunque son frágiles. Su rendimiento depende crucialmente de la alineación de las capas de grafito y del proceso de grafitización, lo que influye directamente en sus propiedades mecánicas. Pueden fabricarse con alto módulo ( $>700$  GPa) o alta resistencia ( $>5$  GPa), aunque lograr ambas características simultáneamente sigue siendo un desafío.

Por otro lado, las **fibras de vidrio**, con diámetros de 8 a 15  $\mu\text{m}$ , ofrecen una variedad de tipos (E, C, S) con diferentes composiciones y propiedades. El vidrio E es el más común por su equilibrio entre resistencia, rigidez y costo, mientras que el vidrio C ofrece mayor resistencia a la corrosión y el vidrio S destaca por su alta rigidez y resistencia a la temperatura. A diferencia del carbono, el vidrio es isótropo y su resistencia se ve afectada por daños superficiales, lo que requiere la aplicación de capas protectoras.

En cuanto a las **fibras orgánicas**, el Kevlar sobresale por su alta resistencia y rigidez teórica, aunque con limitaciones por imperfecciones en la alineación de las cadenas poliméricas. Existen dos modelos principales, Kevlar 29 y 49, siendo este último el de mayor rendimiento, aunque ambos presentan baja resistencia a la compresión axial.

En términos comparativos, el Kevlar es el más resistente, el carbono el más rígido y el vidrio el más económico.

Al considerar la relación resistencia/densidad, las fibras superan significativamente a los materiales convencionales. Las fibras SCS-6, IM8, boro y zafiro ofrecen la mejor combinación de rigidez y resistencia, destacando el IM8 por mantener un diámetro pequeño que favorece su flexibilidad. En comparación con los **metales estructurales tradicionales** (acero, aluminio y titanio), las fibras pueden alcanzar una rigidez específica hasta 13 veces mayor y una resistencia específica hasta 16 veces superior. Esto explica el potencial de ahorro de peso que ofrecen los materiales compuestos avanzados en aplicaciones de ingeniería. La elección de la fibra adecuada dependerá del contexto específico de la aplicación, considerando las propiedades y limitaciones de cada tipo, así como las variaciones en propiedades según el fabricante, el proceso de fabricación y el método de prueba. Destaca también que algunas fibras como el Kevlar y ciertos tipos de carbono presentan coeficientes de expansión térmica negativos, lo que puede ser beneficioso para diseños específicos.

#### MATRICES

Las matrices en materiales compuestos juegan un papel fundamental en la transferencia de carga, protección de las fibras y determinación de propiedades clave como la rigidez y resistencia.

Las matrices poliméricas, cerámicas y metálicas presentan una amplia gama de propiedades, siendo las **poliméricas** (como epoxi, poliéster y poliimida) las más comunes. Las resinas termoestables (epoxi y poliéster) destacan por su resistencia al calor y ductilidad, aunque presentan limitaciones térmicas y pueden sufrir roturas prematuras por defectos superficiales. Las resinas epoxi, superiores en propiedades pero más costosas, se utilizan en aplicaciones de alta tecnología, mientras que las de poliéster son más económicas y adecuadas para aplicaciones menos exigentes. Las matrices

termoplásticas (polipropileno, nylon, policarbonatos) se emplean en aplicaciones de baja exigencia y temperatura moderada, generalmente con refuerzos de fibra corta. Las **matrices metálicas**, como aluminio y titanio, ofrecen un amplio rango de temperatura y alta conductividad, aunque con mayor peso y riesgo de degradación interfacial. Por último, las **matrices cerámicas**, incluyendo compuestos de carbono/carbono, sobresalen por su resistencia a temperaturas extremas y alto módulo, pero son frágiles. La selección de la matriz depende de la aplicación específica, considerando propiedades como el módulo de elasticidad, resistencia, coeficiente de expansión térmica y densidad, así como factores económicos y limitaciones térmicas.

En la siguiente tabla 2.1 se recoge un resumen de las propiedades más relevantes de los materiales metálicos, las fibras y las matrices descritas anteriormente. Esta recopilación permite comparar de forma directa las características mecánicas y físicas de cada componente, lo cual resulta esencial para entender su papel en el comportamiento global de los materiales compuestos.

Tabla 2.1 Propiedades de las Fibras, Matrices y Metales [13].

Material	Densidad $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Módulo $E$ [GPa]	Coef. de Poisson $\nu$	Resistencia $\sigma_f$ [MPa]	Rigidez específica $(E/\rho)_{rel}$	Resistencia específica $(\sigma_f/\rho)_{rel}$	Coef. de dilatación térmica [ $\mu$ /°C]
----------	--	------------------------	---------------------------	------------------------------------	---	--	--

**METALES**

Acero	7.8	200	0.32	1724	1.0	1.2	12.8
Aluminio	2.7	69	0.33	483	1.0	1.0	23.4
Titanio	4.5	91	0.36	758	0.95	1.2	8.8

**FIBRAS (Propiedades axiales)**

AS4	1.80	235	0.20	3599	5.1	11.1	-0.8
T300	1.76	231	0.20	3654	5.1	11.5	-0.5
P100S	2.15	724	0.20	2199	13.2	5.5	-1.4
IM8	1.8	310	0.20	5171	6.7	16.1	—
Boro	2.6	385	0.21	3799	5.8	8.3	8.3
Kevlar 49	1.44	124	0.34	3620	3.6	13.9	-2.0
SCS-6	3.3	400	0.25	3496	5.1	6.1	5.0
Nicalon	2.55	180	0.25	2000	2.8	4.4	4.0
Alúmina	3.95	379	0.25	1585	3.7	1.9	7.5
Vidrio S-2	2.46	86.8	0.23	4585	1.4	10.4	1.6
Vidrio E	2.58	69	0.22	3450	1.05	7.5	5.4
Zafiro	3.97	435	0.28	3600	4.3	5.1	8.8

**MATERIALES DE MATRIZ**

Epoxi	1.38	4.6	0.36	58.6	0.08	0.4	63
Poliimida	1.46	3.5	0.35	103	0.03	0.4	36
Cobre	8.9	117	0.33	400	0.5	0.3	17
Carburo de silicio	3.2	400	0.25	310	4.9	0.5	4.8

## 2.2 Unión Fibra-Matriz

La interfase entre la matriz y las fibras en un material compuesto es crucial, ya que determina la transmisión de cargas y la integridad estructural del material. Una interfase robusta asegura que las fibras sigan reforzando el material incluso tras fracturas. Sin embargo, una unión excesivamente fuerte puede reducir la tenacidad a fractura, limitando la absorción de energía al inhibir la propagación de grietas por la interfase. Este equilibrio entre resistencia de la interfase y tenacidad es fundamental para optimizar el rendimiento del material.

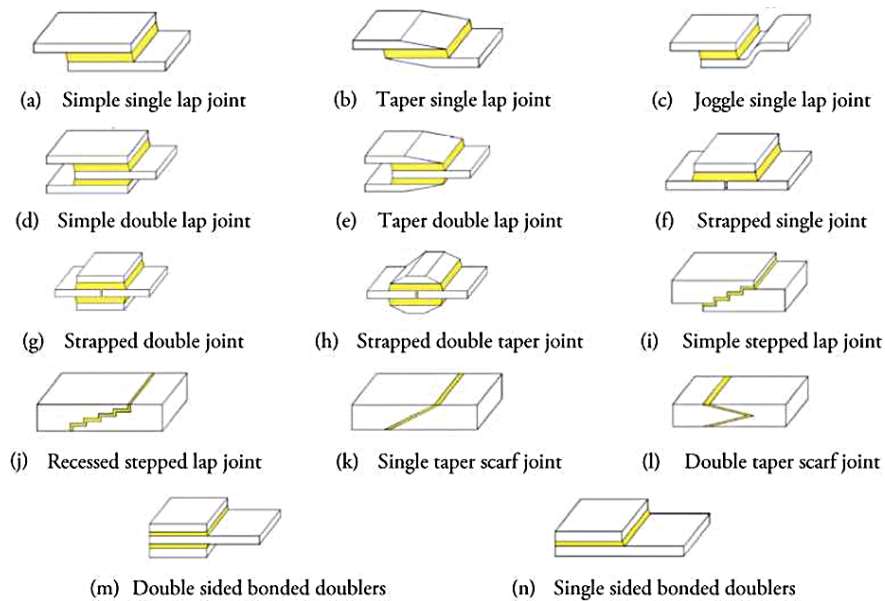
## 2.3 Uniones en Materiales Compuestos

### 2.3.1 Uniones Adhesivas

Para comenzar se hablará de forma extendida sobre las uniones adhesivas, pues resulta imprescindible considerando que más adelante en este proyecto se llevará a cabo un análisis numérico de un tipo en específico, la unión a solape simple SLJ.

La idea de unión adhesiva es tan simple como un método de unión que utiliza un adhesivo para unir dos o más elementos en un material compuesto. Este método ofrece una serie de ventajas significativas, incluyendo la capacidad de unir materiales disímiles y láminas de pequeño espesor con facilidad. Proporcionan una distribución de tensiones más uniforme, lo que mejora la vida a fatiga de la unión, y permiten diseños más ligeros en comparación con otras uniones mecánicas. Además, las uniones adhesivas proporcionan superficies externas suaves, inhiben o previenen la corrosión entre metales diferentes, y la zona de pegado actúa como membrana sellante. Finalmente, su uso a menudo conduce a una reducción en los costes de fabricación.

A pesar de sus ventajas, presentan varios inconvenientes importantes. A menudo requieren tratamientos superficiales, especialmente cuando se busca máxima resistencia y durabilidad, y algunos adhesivos necesitan tiempos de curado prolongados. Su resistencia a temperaturas elevadas es limitada, y las uniones que deben soportar cargas significativas requieren diseños específicos. Además, pueden ser frágiles a bajas temperaturas y mostrar un comportamiento deficiente al *creep*, especialmente los adhesivos flexibles. Algunos adhesivos son altamente inflamables y tóxicos, y ciertos procesos de pegado pueden ser costosos. Finalmente, las propiedades mecánicas de las uniones adhesivas pueden degradarse con el tiempo, especialmente bajo condiciones ambientales severas.[4]



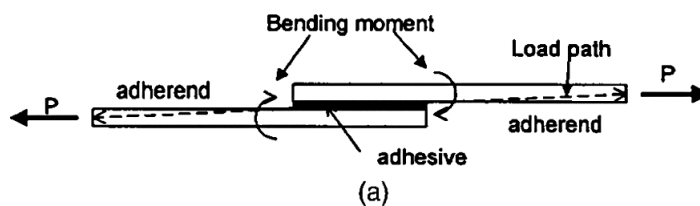
**Figura 2.4** Tipos de Uniones Adhesivas [7].

Existen diversos tipos de uniones adhesivas, aunque se procede a detallar uno en específico, la unión a solapa simple, por su relevancia en este proyecto.

### Unión a Solape Simple- SLJ

Tomando como base el artículo [22] de M.Y.Tsai y J.Morton, donde se explican modelos analíticos clásicos y se comparan con análisis numéricos obtenidos mediante el software ABAQUS, se obtiene una visión completa del comportamiento de una unión a solape simple, identificando tanto la limitación de los enfoques teóricos como la distribución real de tensiones en la unión.

La unión a solape simple es una de las configuraciones más empleadas debido a su sencillez constructiva y a su eficacia en la transmisión de cargas. Consiste en el solapamiento de dos adherentes unidos por una capa de adhesivo. Bajo carga de tracción, la línea de acción de la fuerza aplicada no coincide con el plano medio de la unión, generando una excentricidad que produce un momento flector adicional en los extremos del solape.



**Figura 2.5** Esquema genérico SLJ [21].

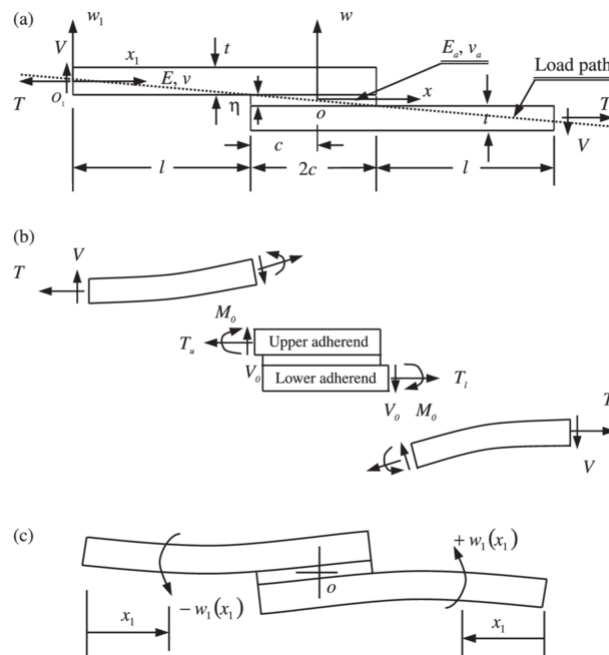
Este efecto de excentricidad constituye la principal limitación del SLJ, ya que induce tensiones normales en la interfase, junto a las tensiones de cizalladura propias del adhesivo. Es por esto que, pese a que el SLJ sea un ensayo muy útil para determinar la resistencia al cortante de los adhesivos (según la norma ASTM D1002) su eficiencia se ve reducida frente a otras configuraciones como el doble solape.

El análisis de tensiones de esta unión lleva más de ocho décadas siendo objeto de investigación:

El análisis más antiguo lo desarrolla **Volkersen (1938)**, quién introduce el concepto de shear lag, que considera los adherentes rígidos y que el adhesivo se deforma solo por cizalladura. Predice un comportamiento caracterizado por tensiones cortantes constantes a lo largo del solape, lo que simplifica en exceso el comportamiento real.

Más tarde, **Goland & Reissner (1944)**, mejoraron significativamente el modelo de Volkersen al tener en cuenta la excentricidad de la trayectoria de la carga. Dicha excentricidad genera un momento de borde,  $M_0$ , en los extremos del solape, que produce flexión en los adherentes. Como consecuencia, en el adhesivo aparecen tensiones normales de pelado, además de tensiones cortantes, que son especialmente críticas en los bordes de la unión. Esto permitió identificar que el fallo del SLJ no está gobernado únicamente por el cortante, sino también por las tensiones normales inducidas por el momento flector.

En lo que sigue adoptamos la notación de la Figura 2.6: adherentes con espesor de  $t$ , adhesivo con espesor de  $h_a$ , longitud de solape  $2c$  y longitud de tramos libres  $l$ . La carga axial  $T$  genera cortante  $V$  en la interfase y un par  $M_0$  en los bordes por la excentricidad; se asumen deflexiones antisimétricas  $w_i(x_i)$



**Figura 2.6** Diagramas de Equilibrios en una unión SLJ: a) Definiciones de la geometría, las propiedades del material y la trayectoria de carga excéntrica, b) Diagrama de cuerpo libre de una unión a solapa simple sometida a carga de tracción, c) Deflexiones laterales antisimétricas [14].

**Hart-Smith (1973)**, propuso un modelo mejorado que elimina la restricción de solapamiento agrupado (asumida en el análisis de Goland y Reissner) al tratar los adherentes como vigas sobre una base elástica. Además, proporcionó soluciones de tensión para adhesivos elásticos lineales y elásticos-plásticos. Con este enfoque consiguió obtener distribuciones de tensiones más realistas, en particular para adhesivos flexibles, y mostrar que el fallo de la unión depende tanto de la rigidez relativa de los adherentes como de la respuesta elástica del adhesivo.

**Allman (1977)** propuso un modelo bidimensional aplicando el Principio de Energía Mínima. Consideró condiciones de contorno más realistas en el extremo del solape, introduciendo deformaciones de flexión, tracción y cortadura. Asumió una tensión normal longitudinal nula, tensión de cortadura constante y tensión de pelado variable linealmente a través del espesor del adhesivo. Por lo que mejoró la representación de las condiciones de contorno respecto a modelos anteriores.

**Chen y Cheng (1983)** desarrollan un enfoque variacional basado en el Principio de Energía Complementaria. Usaron condiciones similares a las de Allman, pero refinaron la formulación matemática para obtener distribuciones de tensiones más precisas en la zona de solape, en particular en los extremos libres.

**Oplinger (1991)** presentó un modelo de viga en capas que incorporaba grandes deflexiones en el solape, aspecto que los modelos previos no contemplaban adecuadamente. Su formulación permitió obtener soluciones más cercanas al comportamiento real de uniones largas y adhesivos flexibles, mejorando la predicción de tensiones de cortadura y pelado en comparación con Goland & Reissner o Hart-Smith.

### 2.3.2 Uniones Mecánicas (Remachadas o Atornilladas)

Consisten en sistemas de unión que transmiten esfuerzos a través de puntos concentrados, utilizando elementos como remaches, tornillos o bulones. Su principal característica consiste en que la carga se transmite de forma puntual en torno a los taladros, lo que da lugar a concentraciones de tensiones. Aunque proporcionan soluciones desmontables y considerablemente utilizadas en el sector aeronáutico, presentan el inconveniente de introducir discontinuidades y posibles mecanismos de fallo como la delaminación o el aplastamiento alrededor de los orificios.



**Figura 2.7** Remaches.



**Figura 2.8** Bulones.



**Figura 2.9** Tornillos.

### 2.3.3 Uniones Soldadas

Su aplicación está limitada a materiales metálicos. No obstante, en el caso de materiales compuestos de matriz termoplástica se ha desarrollado la denominada “soldadura de compuestos”, en la que la matriz se ablanda por calentamiento y posteriormente se solidifica, generando un mecanismo similar al de la unión adhesiva. Constituye una alternativa interesante por la rapidez de su ejecución y la posibilidad de automatización.

## 2.4 Mecánica de la Fractura

De forma previa a discutir las contribuciones de Griffith a la Mecánica de la Fractura actual, vale la pena mencionar un estudio previo de Wieghardt (1907-1995) que es particularmente importante desde el punto de vista de la mecánica de sólidos.[8]

**Wieghardt** realizó un trabajo pionero al proporcionar la primera solución elástica que reconocía la existencia de singularidades de tensión en grietas. En uno de sus artículos, resolvió el problema de una cuña elástica lineal sometida a una fuerza concentrada, analizando detalladamente el comportamiento asintótico de las tensiones cerca del vértice, especialmente en el caso de una grieta.

Su contribución más significativa fue identificar correctamente la forma matemática de la singularidad de tensión  $r^{(-\alpha)}$  donde  $r$  es la distancia desde el vértice de la cuña, y demostrar cómo esta dependía del ángulo de la cuña  $\alpha$ , y la simetría de la carga. Al enfrentarse a la paradoja de que sus cálculos predecían tensiones infinitas en la punta de la grieta para cualquier fuerza aplicada, mientras que la experiencia mostraba fractura solo con fuerzas críticas, Wieghardt propuso que la fractura no depende de la tensión en un punto específico, sino de un promedio sobre una “pequeña sección” alrededor de la punta de la grieta.

Así intentó establecer un **Criterio de Fractura** donde se ha de comparar esta tensión promedio con la resistencia teórica del material, utilizando conceptos como la tensión cortante máxima o la tensión de tracción máxima para determinar la dirección de iniciación de la fractura.

### 2.4.1 Mecánica de la Fractura Elástica Lineal

La base de la Mecánica de la Fractura es la Mecánica de Fractura Elástica Lineal (MFEL). Se asume que los procesos inelásticos solamente ocurren de forma localizada en una zona plástica en la punta de la grieta y se ha encontrado que tales fallos siempre se originan en algún tipo de grieta o defecto.

La MFEL tiene como objetivo determinar el momento exacto en el que una grieta existente en un material comienza a crecer o propagarse. Las suposiciones básicas son: el material es continuo, isótropo y homogéneo, y la tensión es proporcional a la deformación (siguiendo la Ley de Hooke, donde la deformación de un material es directamente proporcional a la fuerza aplicada). En esta teoría, generalmente se hace una distinción entre tres diferentes modos de apertura de grieta mostrados en la Figura 2.10, donde el **Modo I** indica la apertura de una grieta normal a sus bordes; el **Modo II** es el desplazamiento tangencial de los bordes de la grieta en el plano normal al frente de la grieta y el **Modo III** es el desplazamiento tangencial de los bordes de la grieta tangencial al frente de la grieta. El caso de superposición de estos modos de apertura de grieta se denomina carga de modo mixto. Finalmente, considerando que la fractura es generalmente un proceso muy irregular a escala microscópica, en la Mecánica de la Fractura solo se considera el modo macroscópico de crecimiento de grietas.

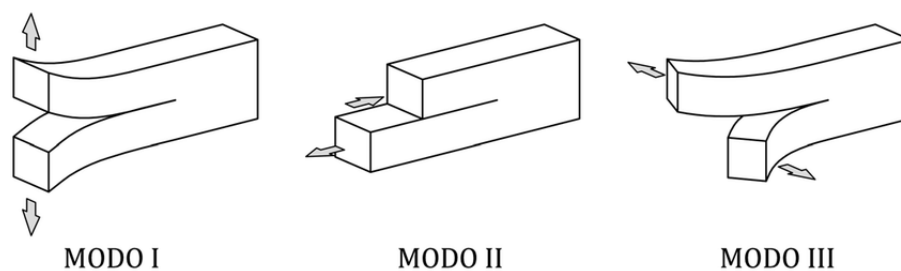


Figura 2.10 Modos de Fractura [12].

### Teoría de Griffith

La teoría de Griffith (1920) es un criterio energético que establece que:

*“La condición necesaria para el crecimiento de una grieta es que la cantidad de energía de deformación liberada debe ser igual o mayor a la energía requerida para crear las nuevas superficies de la grieta.”*

Surge la necesidad de definir un nuevo concepto: la **Tasa de Liberación de Energía (ERR)**,  $G$ , como el decremento de energía potencial por unidad de área, debido a la propagación de la grieta.

Generalmente, este criterio se expresa de la siguiente manera:

$$G = \left[ \frac{dU_s}{da} \right]_{P=\text{const}} = - \left[ \frac{dU_s}{da} \right]_{u=\text{const}} \geq G_c \quad (2.1)$$

donde:

- $G$  se denomina tasa de liberación de energía de deformación y puede evaluarse considerando que la carga externa  $P$  o el desplazamiento  $u$  se mantienen constante
- $G_c$  se denomina energía de fractura o tasa crítica de liberación de energía y es una propiedad del material
- $d_A$  es el área infinitesimal de la grieta que es  $d_A$  multiplicado por el ancho  $t$

### Teoría de Irwin

Define el concepto de Factor de Intensidad de Tensiones,  $K$ , que depende de la geometría, el tamaño, la ubicación de la grieta y el modo de carga.

El campo de tensiones asintótico cerca de la punta de la grieta (en Modo I) sería:

$$\sigma_{i,j}(r,\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{i,j}(\theta) \quad (2.2)$$

Donde  $\sigma_{i,j}$  es la distribución de tensiones cerca de la punta de la grieta, el sistema de coordenadas polares  $(r,\theta)$  tiene el origen en la punta de la grieta y  $f_{i,j}(\theta)$  es la función angular. Este campo asintótico es válido únicamente en la zona próxima a la punta de la grieta, donde el comportamiento presenta una singularidad de tipo  $1/\sqrt{r}$  característica de la Mecánica de la Fractura.

En este caso, el valor de  $K$  para una grieta recta con una longitud de  $2a$  perpendicular a la dirección de carga sería:

$$K_I = \sigma_{\text{ext}} \sqrt{\pi a} \quad (2.3)$$

En 1957, Irwin demuestra que existe una relación entre la tasa de liberación de energía de deformación,  $G$ , y el factor de intensidad de tensiones. Esta relación para una grieta bajo carga de modo I es:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (2.4)$$

Donde:

$$E' = E \quad \text{en tensión plana} \quad (2.5)$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{en deformación plana} \quad (2.6)$$

Cuando el factor de intensidad de tensiones toma un valor crítico en Modo I, se denomina **Tenacidad a Fractura,  $K_{IC}$** .

Como conclusión, según la MFEL, no es necesario conocer todo el campo de tensiones sino solo el factor de intensidad de tensiones.

La teoría predice que en la punta de una grieta la tensión sería infinita (una singularidad matemática), pero se sabe que esto es físicamente imposible en la realidad. Lo que realmente ocurre es que la tensión en la punta de la grieta alcanza un máximo limitado por la resistencia de fluencia del material. Cuando esto sucede, se forma alrededor de la punta de la grieta una pequeña área llamada 'zona plástica', donde el material ya no se comporta de manera elástica lineal sino que sufre deformación plástica permanente. Por lo tanto, al aplicar la Mecánica de Fractura Elástica Lineal, debemos reconocer que sus ecuaciones no son válidas dentro de esta zona plástica, sino solo a cierta distancia de la punta de la grieta.

Esta limitación hace que la MFEL solo sea aplicable cuando se cumplen ciertas condiciones: principalmente que la zona plástica sea lo suficientemente pequeña en comparación con las dimensiones de la grieta y de la estructura analizada.

La síntesis introductoria sobre Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) se apoya principalmente en los trabajos de [23] y [9].

### 2.4.2 Mecánica de la Fractura De La Interfase

#### LEBIM

El Modelo de Interfase Lineal Elástica-Frágil (LEBIM, por sus siglas en inglés) representa una aproximación simplificada para el estudio de uniones entre materiales. Este enfoque surgió originalmente para caracterizar capas adhesivas de espesor reducido y posteriormente se extendió al análisis de la evolución de tensiones en grietas dentro de la mecánica de fractura.

El fundamento conceptual del LEBIM se basa en la teoría de rotura de interfase propuesta por Prandtl, quien estableció una distribución lineal de muelles elásticos. La adaptación de este modelo para caracterizar específicamente el comportamiento de interfases fue desarrollada por el Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales (GERM) de la Universidad de Sevilla. Una ventaja significativa del LEBIM es que proporciona una metodología más sencilla para modelar la propagación de la rotura a través de la interfase en comparación con otros modelos más complejos, como los Modelos de Zona Cohesiva (CZM).

Desde el punto de vista matemático, el LEBIM puede considerarse como un caso límite de un CZM bilineal, siendo especialmente adecuado para configuraciones donde la zona de proceso o ablandamiento es considerablemente menor que el tamaño de la grieta y donde predomina un comportamiento de rotura frágil. El modelado mediante LEBIM evita la necesidad de implementar estrategias numéricas con elementos de interfase de espesor nulo, permitiendo su aplicación tanto a interfases de espesor reducido como a aquellas sin espesor definido, dependiendo de la implementación computacional utilizada (como las subrutinas UMAT o UINTER en el software de elementos finitos Abaqus).

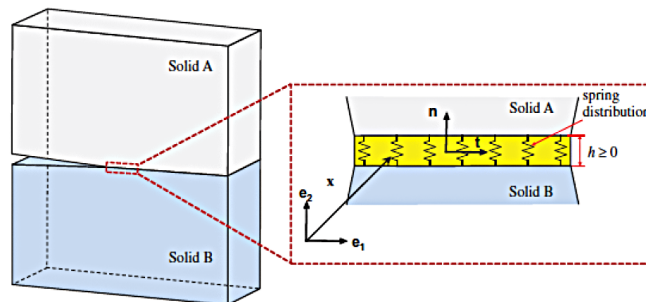


Figura 2.11 LEBIM [23].

#### · Ley Constitutiva de la Distribución de Muelles

La interfase sin dañar se va a modelar como una distribución continua de muelles en la dirección normal y tangencial. Mediante esta ley se va a obtener el valor de las rigideces de los muelles,  $K_n$  y  $K_t$ , pero para ello se ha de relacionar primero las propiedades elásticas del adhesivo y las propiedades de los muelles.

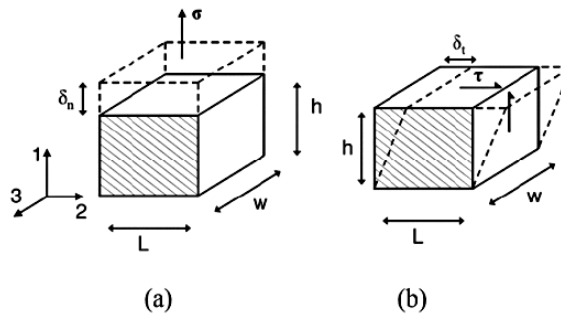
Las propiedades elásticas de la capa de adhesivo sin dañar son: Módulo de Young  $E_l$ , Coeficiente de Poisson  $\nu_l$ , Parámetro de Lamé  $\lambda_l$ , modulo a cortadura  $\mu_l$ .

Se relacionarán entonces:

- Las tensiones normales con los desplazamientos relativos de dos puntos de la interfase,  $\sigma$ - $\delta_n$ .
- Las tensiones tangenciales y los desplazamientos asociados a esta dirección,  $\tau$ - $\delta_t$ .

Y se obtienen los valores de las rigideces de los muelles,  $K_n$  y  $K_t$ .

Para obtener esta relación consideraremos un paralelepípedo de adhesivo, de sección  $Lxw$  y altura  $h$ , bajo las acciones de tanto tensiones normales y tangenciales.[16]



**Figura 2.12** Paralelepípedo sometido a: a) Tensión normal y b) Tensión Tangencial [16].

En la Figura 2.12 podemos ver un esquema de lo descrito anteriormente, donde  $\sigma = \sigma_{11}$  y  $\tau = \sigma_{12}$ . Se obtiene la ley constitutiva de los muelles del adhesivo como:

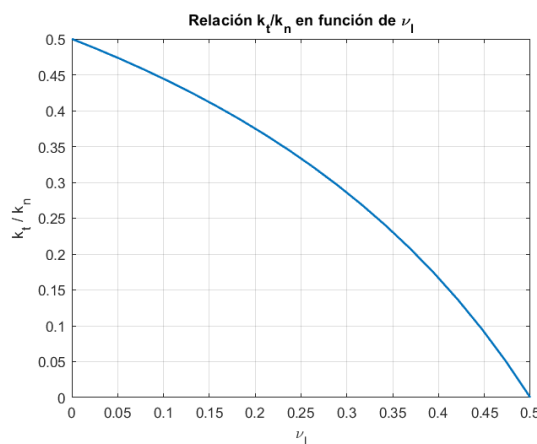
$$\begin{aligned} k_n &= \frac{E_l}{h} & k_t &= \frac{\mu_l}{h} \\ \sigma &= k_n \delta_n & \tau &= k_t \delta_t \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si el cubo de adhesivo mostrado anteriormente está libre, es decir, no une dos o más cuerpos, y se somete a una carga de tracción o compresión en la dirección 1, es razonable que pueda comprimirse o expandirse libremente en las direcciones 2 y 3 debido al efecto Poisson. No obstante, cuando se analiza una capa delgada de adhesivo que une dos sólidos elásticos y cuya rigidez es menor que la de dichos sólidos, la rigidez del sistema queda determinada por la del adherente. Esto se debe a que la condición de contorno entre el adhesivo y los sólidos elásticos restringe los desplazamientos en las direcciones 2 y 3, haciendo que las deformaciones  $\epsilon_{22}$  y  $\epsilon_{33}$  sean nulas

$$u_2 = u_3 = 0 \Rightarrow \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0. \quad (2.8)$$

Considerando un caso de deformación plana, la rigidez normal  $k_n$  se puede expresar como:

$$k_n = \frac{E_l(1 - \nu_l)}{h(1 + \nu_l)(1 - 2\nu_l)}; \quad \frac{k_t}{k_n} = \frac{2(1 - \nu_l)}{1 - 2\nu_l}. \quad (2.9)$$



**Figura 2.13** Relación entre  $\frac{k_t}{k_n}$  y  $\nu_l$  [16].

· **Criterio de Fallo de la Interfase**

El LEBIM establece el fallo de la interfase a partir de un criterio energético, basado en la tasa de liberación de energía (Energy Release Rate, ERR).

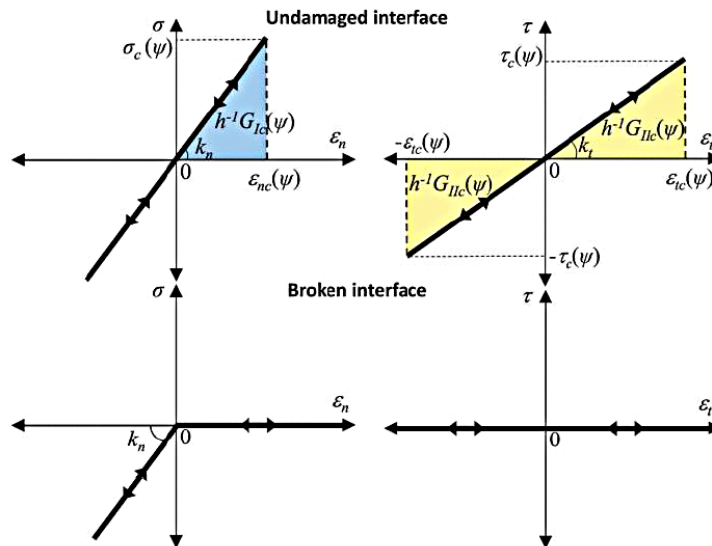
1. Estados de la Interfase

Los puntos de la interfase  $\Gamma$  que se encuentran en estado intacto mantienen unos valores de desplazamientos relativos o tensiones por debajo de los críticos.

$$\text{Interfase lineal elástica (intacta)} \quad \begin{cases} \sigma(x) = k_n \delta_n(x), & \delta_n(x) \leq \delta_{nc}(\psi_G(x)), \\ \tau(x) = k_t \delta_t(x), & |\delta_t(x)| \leq \delta_{tc}(\psi_G(x)). \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\text{Interfase rota} \quad \begin{cases} \sigma(x) = k_n \langle \delta_n(x) \rangle_-, \\ \tau(x) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Donde  $\langle \cdot \rangle_{\pm}$  son los paréntesis (corchetes) de Macaulay e indican la parte real positiva o negativa de un número, según el signo empleado.



**Figura 2.14** Ley Constitutiva de la constitución de muelles. Interfase intacta: a) Modo I, b) Modo II. Interfase rota: c) Modo I y d) Modo II [23].

2. Criterio Energético de Fallo

El criterio de fallo de este modelo consiste en la Energía Crítica de rotura,  $G$ . El valor de este parámetro para un punto de la superficie intacta, no puede superar su valor crítico.

$$G(x) < G_c(\psi(x)) \quad (2.12)$$

En el caso de una interfase lineal, el ERR se define como la energía de deformación elástica almacenada en los labios de la grieta. Se puede definir este parámetro como:

$$G = G_I + G_{II} = \frac{\sigma \delta_n}{2} + \frac{\tau \delta_t}{2} \quad (2.13)$$

$$G = \frac{\sigma^2}{2k_n} + \frac{\tau^2}{2k_t} = \frac{\delta_n^2 k_n}{2} + \frac{\delta_t^2 k_t}{2} \quad (2.14)$$

La definición de  $G_I = \frac{\sigma \delta_n}{2}$  es solo valida para tensiones de tracción, en el caso de tensiones de compresión  $G_I$  se considerará 0. Se presenta una nueva forma de definir el criterio de fallo donde aparece el **ángulo de mixticidad**:

$$G = G_I + G_{II} = G_I(1 + \tan^2 \psi_G) = G_I \left(1 + \frac{k_n}{k_t} \tan^2 \psi_\sigma\right) = G_I \left(1 + \frac{k_t}{k_n} \tan^2 \psi_u\right) \quad (2.15)$$

donde:

$$\tan^2 \psi_G = \frac{G_{II}}{G_I}, \quad \tan \psi_\sigma = \frac{\tau}{\sigma}, \quad \tan \psi_u = \frac{\delta_t}{\delta_n} \quad (2.16)$$

El ángulo  $\psi_G$  define la mixticidad del modo de fractura basada en la ERR (tasa de liberación de energía), y los ángulos  $\psi_\sigma$  y  $\psi_u$  definen las mixticidades del modo de fractura basadas en la tensión y el desplazamiento relativo respectivamente.

Por lo tanto,

$$\psi_G = 0^\circ \Rightarrow \psi_\sigma = \psi_u = 0^\circ \quad (\text{modo I puro, apertura}). \quad (2.17)$$

$$\psi_G = 90^\circ \Rightarrow \psi_\sigma = \psi_u = 90^\circ \quad (\text{modo II puro, cizalladura}). \quad (2.18)$$

$\psi_G$ ,  $\psi_\sigma$  y  $\psi_u$  son parámetros importantes que gobiernan el crecimiento de la grieta en la interfase.

A continuación, se procede a definir un nuevo parámetro,  $\lambda$ , que representa la sensibilidad al modo de fractura. Su valor se encuentra entre los valores [0.2,0.3].

Se ha descubierto una fuerte dependencia entre la tenacidad a la fractura y la combinación de modos de fractura, y es por ello que se va a presentar una nueva expresión para definir la energía crítica de rotura (ERR) en función del parámetro de sensibilidad y del ángulo de combinación de modos. Esta expresión se conoce como **Ley de Hutchinson-Suo**:

$$\hat{G}_c(\psi(x)) = 1 + \tan^2[(1 - \lambda) \psi_G(x)] \quad (2.19)$$

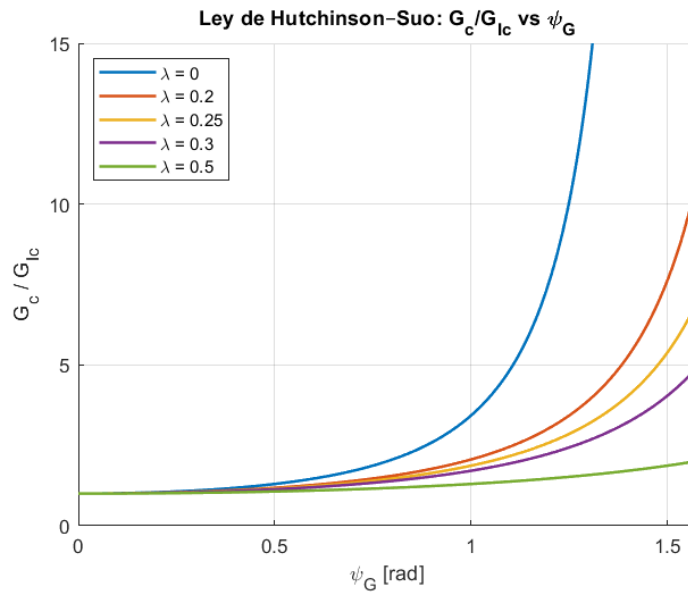
$$\hat{G}_c(\psi(x)) = \frac{G_c(\psi_G)}{G_{Ic}} \quad (2.20)$$

Con las expresiones anteriores podemos expresar la tensión crítica en función del ángulo de mixticidad, quedando como:

$$\sigma_c(\psi_G) = \bar{\sigma}_c \sqrt{1 + \tan^2[(1 - \lambda) \psi_G]} \cos(\psi_G), \quad \delta_{nc}(\psi_G) = \frac{\sigma_c}{k_n}. \quad (2.21)$$

De la misma forma, si operamos para la tangencial:

$$\tau_c(\psi_G) = \sqrt{\frac{k_t}{k_n}} \bar{\sigma}_c \sqrt{1 + \tan^2[(1 - \lambda) \psi_G]} \sin(\psi_G), \quad \delta_{ic}(\psi_G) = \frac{\tau_c}{k_t}. \quad (2.22)$$



**Figura 2.15** Representación de la Ley de Hutchinson-Suo [16].

Como se observa en la Figura 2.15 la interfase nunca romperá en Modo II puro si  $\lambda = 0$  porque existirá una asintota vertical en  $\psi = \frac{\pi}{2}$ . A mayor  $\lambda$ , más fácil será una rotura en modo II. Con el rango de valores  $0 < \lambda < 1$ , se consigue un comportamiento más realista. [16]

El LEBIM se caracteriza por 4 parámetros independientes: tensión normal crítica en modo I,  $\bar{\sigma}_c$ , tenacidad a la fractura en modo I,  $\bar{G}_{Ic}$ , cociente entre las rigideces tangencial y normal en la interfase,  $\xi = \frac{k_t}{k_n}$ , y el parámetro de sensibilidad al modo de fractura de Hutchinson y Suo  $\lambda$ . En este modelo LEBIM la variable interna del daño sólo caracteriza estados de daño binarios (intacto o daño total).

## MECÁNICA DE LA FRACTURA FINITA

El concepto de la Mecánica de la fractura finita, se sustenta en que el inicio y propagación de grietas no puede explicarse únicamente mediante los enfoques de la mecánica de la fractura clásica, con los criterios de Griffith o Irwin, ya que ambos se sustentan en hipótesis que resultan insuficientes para describir con precisión la nucleación de defectos en escalas finitas. Siendo esta hipótesis, la idea de que la propagación de una fisura es infinitesimalmente pequeña. Al descartarla y plantear un equilibrio energético de forma incremental, se logra la determinación del comienzo de grietas con una longitud.

Este concepto abarca una gran cantidad de distintos criterios para el inicio de grietas y todos ellos comparten la idea base de que una **longitud crítica** (que dependa o bien del material o de la estructura) determine el comienzo de la fisura.

Los **criterios tensionales** son conceptualmente sencillos y permiten establecer umbrales de resistencia local, pero no consideran el balance energético global del sistema. Por su parte, los **criterios energéticos** proporcionan una descripción rigurosa de la propagación de grietas, aunque no son capaces de predecir la nucleación en ausencia de defectos iniciales. De esta contradicción surge la necesidad de enfoques integradores, como el **Criterio Acoplado de la Mecánica de la Fractura Finita (CCFFM)** propuesto por Leguillon (2002), que exige el cumplimiento simultáneo de condiciones tensionales y energéticas para la iniciación de una grieta finita. Un análisis más exhaustivo y detallado de estos criterios se pueden encontrar en [10] de donde se han extraído numerosas ideas expuestas sobre el tema de la MFF.

La combinación del CCFFM con modelos de interfase simplificados, como el **LEBIM**, ha demostrado ser especialmente útil en el estudio del fallo en uniones adhesivas y en interfaces de compuestos reforzados con fibras. El LEBIM, al concebir la interfase como una distribución de muelles elásticos frágiles, proporciona una formulación simple y eficiente desde el punto de vista computacional, lo que facilita su integración en códigos de elementos finitos. Asimismo, su extensión mediante el **Principio de Mínima Energía Total sujeto a una Condición de Tensión (PMTE-SC)** aporta una mayor robustez predictiva en configuraciones con trayectorias de fractura múltiples o complejas. Este principio se expone con detalle en el presente trabajo, dado que constituye un aspecto de especial relevancia para los siguientes pasos de la investigación y será determinante en los análisis posteriores.

Lo que se expone a continuación acerca del Criterio Acoplado de la Mecánica de la Fractura Finita (CCFFM) se encuentra fundamentalmente basado en la tesis doctoral de M. Mar Muñoz-Reja [6], en la que se desarrollan de forma detallada las predicciones analíticas y numéricas de los modelos LEBIM y FFM aplicados a grietas en interfaces de materiales compuestos y en sus uniones y en el artículo sobre la Predicción del inicio y crecimiento de grietas de Vladislav Mantic [15] .

El **criterio tensional** establece que la fractura se inicia cuando las tensiones en la interfase alcanzan un valor crítico característico. Para una grieta potencial de longitud  $\Delta a$ , se consideran dos formulaciones principales:

- **Criterio puntual (PSC, Point Stress Criterion):**

$$\min_{0 \leq x \leq \Delta a} \frac{t(x)}{t_c(\psi(x))} \geq 1, \quad (2.23)$$

donde el módulo de la tracción en el punto  $x$  se define como:

$$t(x) = \sqrt{\sigma^2(x) + \tau^2(x)}, \quad (2.24)$$

y el valor crítico función de la mixticidad como:

$$t_c(\psi(x)) = \sqrt{\sigma_c^2(\psi(x)) + \tau_c^2(\psi(x))}. \quad (2.25)$$

- **Criterio promediado (ASC, Average Stress Criterion):**

$$\frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \frac{t(x)}{t_c(\psi(x))} dx \geq 1. \quad (2.26)$$

En formulación adimensional (Mantič, 2014), el criterio tensional puede expresarse como:

$$\frac{\sigma_{nom}}{\sigma_{c,ch}} \geq s(x), \quad (2.27)$$

donde

$$s(x) = \frac{\hat{t}_c(\psi(x))}{\hat{t}(x)}, \quad \hat{t}(x) = \frac{t(x)}{\sigma_{nom}}, \quad \hat{t}_c(\psi) = \frac{t_c(\psi)}{\sigma_{c,ch}}. \quad (2.28)$$

De esta manera, el criterio tensional puede evaluarse bien de forma local (PSC) o como una media sobre  $\Delta a$  (ASC), siendo  $\sigma_{c,ch}$  el parámetro que representa la resistencia característica de la interfase y  $\sigma_{nom}$  la tensión nominal aplicada que depende del problema.

El **criterio energético** surge del balance de Griffith, que establece que la fractura se inicia cuando la energía elástica liberada es suficiente para generar una nueva superficie de grieta. En el contexto de la Mecánica de la Fractura Finita (FFM), esta condición se formula para un incremento finito de longitud  $\Delta a$ , lo que permite describir el inicio de grietas sin necesidad de suponer un defecto inicial infinitesimal.

La condición básica se escribe como:

$$-\Delta\Pi \geq \Delta R, \quad (2.29)$$

donde  $\Delta\Pi$  es la variación de energía potencial del sistema y  $\Delta R$  la energía de fractura asociada a la creación de la nueva superficie.

Expresado en términos de la **tasa de liberación de energía** (ERR), el criterio se resume en:

$$G(\lambda; \Delta a) \geq G_c(\psi), \quad (2.30)$$

siendo  $G(\lambda; \Delta a)$  la energía liberada para un incremento de grieta de longitud  $\Delta a$  bajo un factor de carga  $\lambda$ , y  $G_c(\psi)$  la energía crítica dependiente de la mixticidad  $\psi$ .

En el caso de modelos interfaciales lineales (LEBIM), la energía liberada puede expresarse en función de los saltos de desplazamiento normal y tangencial:

Recordando:

$$G = G_I + G_{II}, \quad (2.31)$$

con las contribuciones de cada modo:

$$G_I = \frac{k_n \langle \delta_n \rangle^2}{2}, \quad G_{II} = \frac{k_t \delta_t^2}{2}. \quad (2.32)$$

Finalmente se obtiene la expresión de la energía liberada:

$$G(\lambda; \Delta a) = \frac{1}{2} \left( k_n \langle \delta_n \rangle^2 + k_t \delta_t^2 \right), \quad (2.33)$$

donde  $k_n$  y  $k_t$  son las rigideces normal y tangencial de la interfase, y el operador de Macaulay  $\langle \cdot \rangle$  garantiza que en compresión normal no se acumule energía de fractura.

De esta manera, el criterio energético define de forma rigurosa el umbral de energía necesario para la iniciación de una grieta finita.

Con objeto de facilitar la comparación entre distintos materiales y configuraciones, resulta útil reescribir el criterio energético en forma adimensional, introduciendo las siguientes magnitudes características de la interfase:

- $E_{ch}$ : módulo característico del material
- $l_{ch}$ : longitud característica
- $\sigma_{c,ch}$ : resistencia característica
- $G_{c,ch}$ : energía crítica característica

#### Forma adimensional de $\gamma$ y $\mu$

En forma adimensional (lineal elástico, carga proporcional) puede escribirse:

$$-\frac{\sigma_{nom}^2 l_{ch}^3}{E_{ch}} \Delta \hat{\Pi}(\Delta S_c) \geq G_{c,ch} l_{ch}^2 \Delta \hat{R}(\Delta S_c), \quad (2.34)$$

y definir

$$g(a) = \frac{\Delta \hat{R}}{-\Delta \hat{\Pi}}, \quad e(a) = \gamma \sqrt{g(a)}, \quad \gamma = \frac{1}{\sigma_{c,ch}} \sqrt{\frac{G_{c,ch} E_{ch}}{l_{ch}}}. \quad (2.35)$$

Equivalente con la fragilidad  $\mu$ :

$$e(a) = \sqrt{\mu} g(a), \quad \mu = \frac{2G_{c,ch} k_{ch}}{\sigma_{c,ch}^2}. \quad (2.36)$$

De este modo, el criterio energético no solo permite establecer el umbral de energía necesario para la iniciación de una grieta finita, sino que, a través de su formulación adimensional, introduce parámetros característicos como  $\gamma$  y  $\mu$  que cuantifican la fragilidad del problema.

Estos parámetros facilitan la comparación entre distintos materiales e interfaces, relacionando de forma unificada la resistencia, la rigidez y la energía crítica.

El marco adimensional así definido constituye la base para enlazar el criterio energético con el tensional, lo que conduce naturalmente al planteamiento del criterio acoplado (tensional–energético), que se abordará a continuación.

El **Criterio Acoplado de la Mecánica de la Fractura Finita (CCFFM)**, propuesto por Leguillon (2002), plantea que la iniciación de una grieta requiere el cumplimiento simultáneo de un criterio tensional y un criterio energético. Este enfoque surge como respuesta a las limitaciones de los criterios clásicos, que por separado conducen a predicciones no realistas: el criterio tensional anticipa la rotura bajo cualquier carga debido a la singularidad en la punta de la grieta, mientras que el criterio energético no predice la nucleación de grietas en ausencia de defectos iniciales.

En elasticidad lineal y bajo cargas proporcionales, los campos de tensiones y de liberación de energía escalan con el factor de carga  $\lambda$ . Para cada longitud candidata de grieta  $\Delta a$ , se definen:

- **Condición tensional:**

$$\lambda \geq s(a), \quad s(a) = \max_{x \in \Delta S_c(a)} \frac{\sigma^{(1)}(x)}{\sigma_c(\psi(x))}, \quad (2.37)$$

- **Condición energética:**

$$\lambda \geq e(a), \quad e(a) = \sqrt{\frac{\int_{\Delta S_c(a)} G_c(\psi(x)) dS}{\int_{\Delta S_c(a)} G^{(1)}(x) dS}}. \quad (2.38)$$

El criterio acoplado exige que ambas condiciones se cumplan simultáneamente.

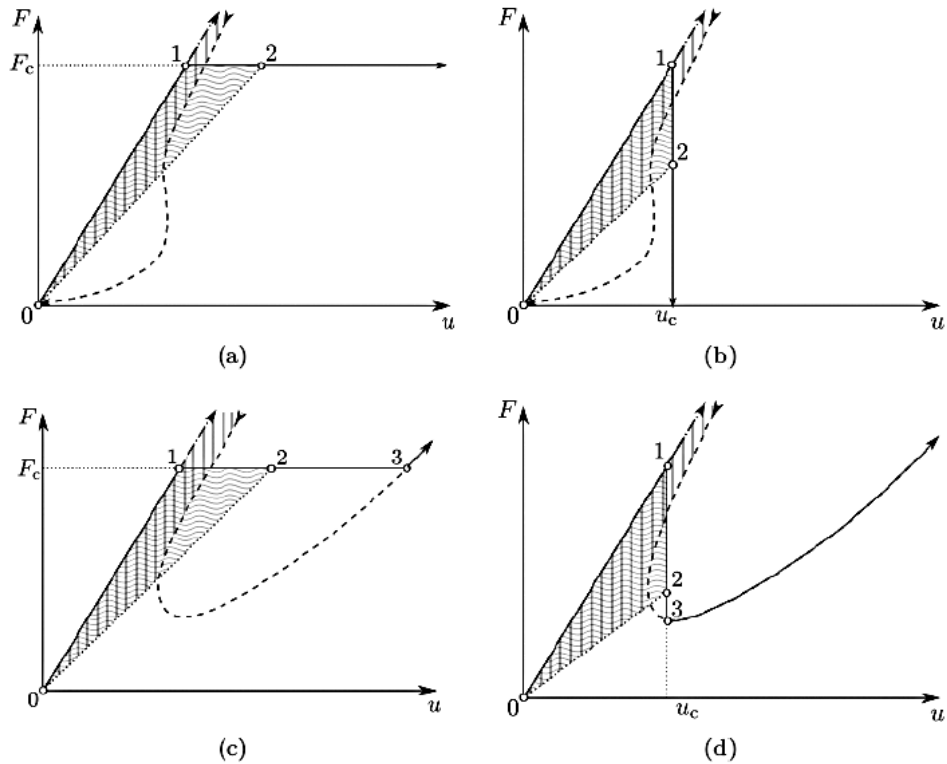
Matemáticamente, la carga crítica se determina como:

$$\lambda_c = \min_a \max \{ s(a), e(a) \}. \quad (2.39)$$

De este modo, el CCFFM permite determinar de forma conjunta la **carga crítica** y la **longitud crítica de grieta**.

La aplicación del CCFFM permite describir no sólo la carga y longitud críticas de inicio de grieta, sino también la evolución posterior de la respuesta estructural. En la Figura 2.16 se muestran ejemplos de diagramas carga–desplazamiento predichos por el criterio acoplado, donde pueden identificarse claramente las tres etapas principales del proceso:

1. Fase inicial lineal elástica (0–1).
2. Inicio de la grieta (1–2).
3. Crecimiento inestable tras la iniciación o, en algunos casos, transición hacia un crecimiento estable posterior (2–3).



**Figura 2.16** Diagramas carga–desplazamiento predichos por el CCFFM en casos con fallo global tras el inicio de la grieta (a–b) y sin fallo global (c–d). Los ensayos a) y c) se controlaron en carga y los ensayos b) y d) en desplazamiento [10].

En resumen, el CCFFM combina las ventajas de los criterios individuales: introduce simultáneamente la resistencia local de la interfase (criterio tensional) y el balance global de energía (criterio energético), proporcionando una predicción más realista del inicio de grietas finitas que los enfoques clásicos por separado.

La aplicación del CCFFM resulta especialmente adecuada cuando se combina con el modelo de interfase lineal elástico–frágil (LEBIM). En este marco, las condiciones tensionales

$$\sigma \leq \sigma_c, \quad \tau \leq \tau_c, \quad (2.40)$$

y las energéticas

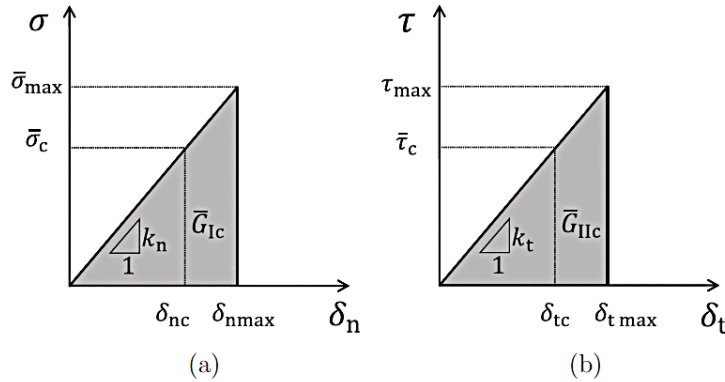
$$G_I \leq G_{Ic}, \quad G_{II} \leq G_{IIc}. \quad (2.41)$$

quedan vinculadas mediante parámetros de fragilidad adimensionales, de modo que rigidez, resistencia y energía crítica se relacionan en un mismo esquema constitutivo. La formulación conjunta **CCFFM+LEBIM** proporciona así una descripción unificada y físicamente fundamentada del inicio de la fractura en uniones adhesivas, constituyendo la base sobre la que se apoyan los desarrollos de este trabajo.

En este contexto, las leyes constitutivas adoptan una forma triangular (Fig. 2.17), de modo que resistencia, rigidez y energía crítica quedan relacionadas de manera unívoca.

Ambos criterios quedan vinculados a través de los parámetros de fragilidad adimensionales:

$$\mu_I = \frac{2k_n G_{Ic}}{\sigma_c^2}, \quad \mu_{II} = \frac{2k_t G_{IIc}}{\tau_c^2}. \quad (2.42)$$



**Figura 2.17** Leyes constitutivas del CCFFM+LEBIM en modo I y modo II, que relacionan resistencia, rigidez y energía crítica de la interfase [6].

De este modo, la formulación CCFFM+LEBIM unifica de manera explícita los dos criterios (tensional y energético) en un mismo marco constitutivo. Esto permite describir el inicio de la grieta a partir de parámetros físicos de la interfase, facilitando la comparación entre materiales y configuraciones y extendiendo el uso del CCFFM a problemas de uniones adhesivas.

Este apartado se ha redactado tomando como base los siguientes textos, [1] y [6].

La combinación del CCFFM con el modelo LEBIM proporciona un marco constitutivo robusto para describir el inicio de la fractura en uniones adhesivas a partir de parámetros físicos bien definidos. No obstante, resulta de especial utilidad extender este planteamiento mediante el **Principio de Mínima Energía Total sujeto a una condición de tensión (PMTE-SC)**, ya que permite formular la iniciación y el crecimiento de la grieta como un problema variacional que garantiza la evolución hacia estados estables de daño. Esta extensión adquiere una relevancia particular en el contexto de la presente investigación, puesto que será fundamental para el tratamiento posterior del daño en la interfase y servirá como base metodológica en los análisis desarrollados en capítulos posteriores.

Este enfoque plantea tanto la iniciación como el crecimiento de grieta mediante incrementos finitos a partir de un problema variacional, en el que el daño sólo puede aparecer en puntos de la interfase que satisfacen previamente el criterio tensional.

Siguiendo la formulación introducida por Mantič [15], se define el conjunto  $\Gamma_c$  como la interfase potencialmente dañable y el subconjunto  $A_\sigma \subset \Gamma_c$  formado por los puntos que cumplen el criterio tensional puntual. La grieta sólo puede crecer en subconjuntos  $\Delta a \subseteq A_\sigma$ , de modo que el criterio actúa como un filtro que reduce el número de configuraciones posibles a estudiar.

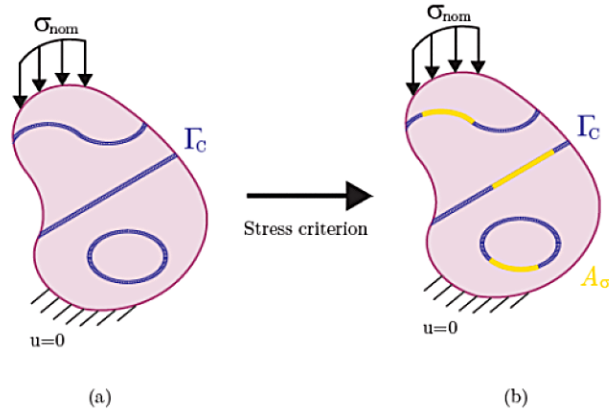


Figura 2.18 CCFFM+LEBIM con PMTE-SC [6].

La evolución del sistema, bajo hipótesis cuasiestática, se plantea como el problema de minimización:

$$\min_{\Delta a \subseteq A_\sigma} [\Pi(\Delta a) + R(\Delta a)], \quad (2.43)$$

donde  $\Pi(\Delta a)$  es la energía potencial del sistema y  $R(\Delta a)$  la energía disipada tras el avance del daño. Una formulación incremental alternativa exige que la suma de las variaciones de energía potencial y disipada se reduzca en cada paso:

$$\min_{\Delta a \subseteq A_\sigma} [\Delta \Pi(\Delta a) + \Delta R(\Delta a)], \quad (2.44)$$

garantizando que el sistema evoluciona hacia un estado de mínima energía total, sujeto al cumplimiento simultáneo del criterio tensional.

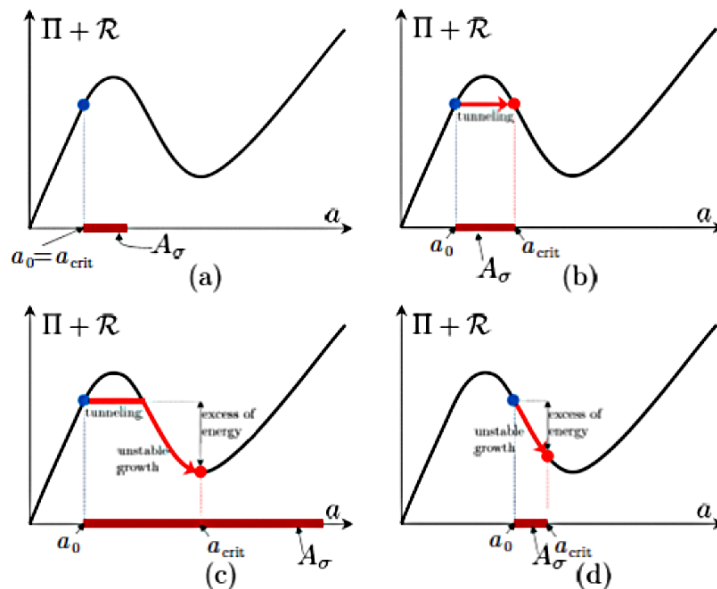


Figura 2.19 Escenarios predichos por el CCFFM+LEBIM con PMTE-SC representados en diagramas tipo  $\Pi + R$  frente a  $a$  [15].

La implementación del PMTE-SC da lugar a distintos escenarios, representados en la Figura 2.19:

- (a) **Sin iniciación:** aunque el criterio tensional se cumple, la energía liberada no es suficiente. La interfase permanece intacta ( $\Delta\Pi + \Delta R > 0$ ).
- (b) **Iniciación estable:** se supera simultáneamente el umbral tensional y energético, de modo que aparece una grieta estable con  $\Delta\Pi + \Delta R = 0$ .
- (c) **Crecimiento inestable:** valores elevados de tensión y energía provocan un avance súbito e incontrolado de la grieta ( $\Delta\Pi + \Delta R < 0$ ).
- (d) **Iniciación localizada:** sólo algunas regiones del conjunto  $A_\sigma$  satisfacen la condición energética, produciendo inicios parciales o discontinuos de daño.

Estos escenarios ilustran la versatilidad del método, capaz de describir tanto nucleaciones estables como inestabilidades dinámicas en el crecimiento de grietas.

Las explicaciones anteriores se han elaborado siguiendo el trabajo de Santiago Espinal [9], quien desarrolla este criterio en el marco de su TFM, basándose a su vez en la formulación propuesta por Mantič [15], mencionada ya anteriormente.



## 3 Subrutina UINTER

---

En el presente capítulo se procede a realizar una detallada explicación sobre el procedimiento que se ha llevado a cabo a la hora de obtener los resultados numéricos de este trabajo.

En primer lugar, se ha de explicar en qué consiste una subrutina UINTER, la cual se ha implementado en este trabajo para modelar la interfase de la unión a solape simple. Posteriormente, se mostrará el código de Fortran que se ha utilizado para la implementación de la UINTER y se explicará detalladamente el mismo. Finalmente, se explicará cómo se ejecuta esta subrutina para obtener el archivo necesario para analizar los resultados nuevamente en el programa Abaqus.

### 3.1 ¿Qué es una UINTER?

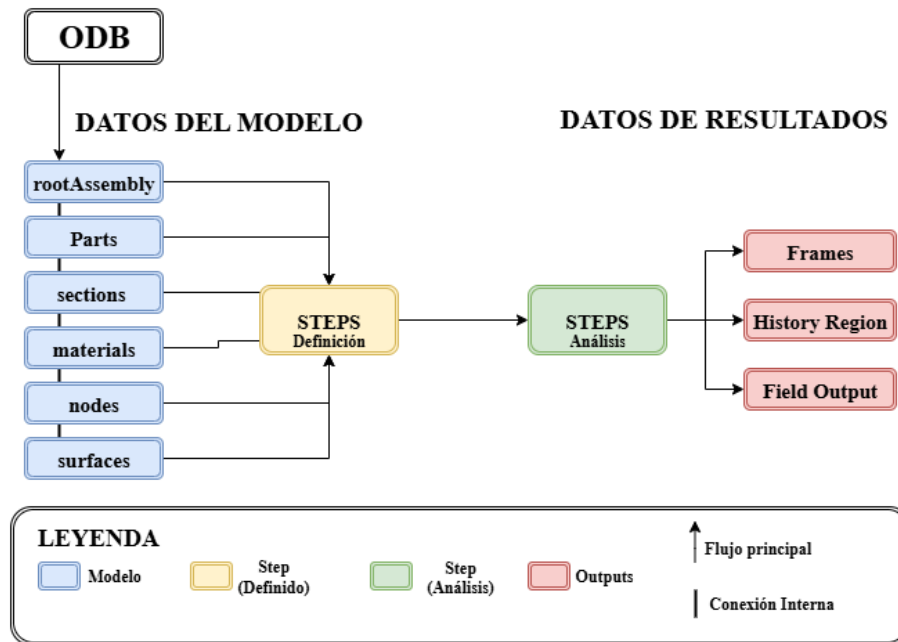
Una subrutina UINTER en Abaqus se utiliza para definir el comportamiento de interfases entre materiales, permitiendo implementar modelos mecánicos avanzados que no se encuentran incluidos en la librería estándar de Abaqus. Esta subrutina permite describir el comportamiento de capas adhesivas, contactos con fricción o zonas de daño interfacial, y se ejecuta en cada iteración del análisis para cada nodo. Abaqus proporciona un conjunto de variables de entrada, o bien se añaden manualmente en el archivo job.inp que se genera desde Abaqus, y la subrutina devuelve las tensiones, la matriz tangente y variables de estado que describen la evolución del daño o separación en la interfase, permitiendo así representar fenómenos que requieren un modelado personalizado. Todos estos datos de salida están recogidos en un archivo de tipo .odb.

#### 3.1.1 Archivo ODB

Un archivo .odb (Output DataBase) es el archivo que Abaqus genera al finalizar una simulación. Este archivo contiene toda la información del análisis, y es el que se utiliza para hacer el post-proceso de los resultados, como:

- Tensiones, deformaciones, desplazamientos. . .
- Energía disipada, daño, fuerzas de contacto. . .
- Variables de estado (definidas en la subrutina UINTER).

Es accesible desde Abaqus/Viewer.



**Figura 3.1** Arquitectura del Sistema de Procesamiento de Datos.

La figura 3.1 muestra cómo está organizada la información dentro del .odb, separada en dos grandes bloques:

### 1. Model Data (Datos del Modelo)

Contiene todo lo que define el modelo:

- rootAssembly: ensamblaje raíz del modelo (estructura general).
- parts: las piezas o cuerpos individuales.
- sections/Categories: secciones y propiedades de materiales.
- materials: definición de los materiales usados.
- nodes, elements, nodeSets, elSets: definición de malla y agrupaciones.
- surfaces: superficies para contactos.
- steps: contiene todos los pasos de carga definidos en el análisis.

### 2. Results Data (Datos de Resultados)

Dependen del tiempo o incremento en el que se guarden los resultados. Cada step contiene:

- Steps: contiene los pasos de análisis (coinciden con los del model data).
- Frames: cada incremento de tiempo donde se almacenan resultados.
- Field Outputs: datos de campo (por ejemplo, tensiones, desplazamientos...).
- History Regions: datos de historia (por ejemplo, reacciones en nodos). Cada región de historia tiene sus outputs (valores en función del tiempo).

## 3.2 Variables, Propiedades del material y Salidas UINTER

En este apartado se definen las variables, propiedades y salidas de la subrutina UINTER, base para entender el modelo LEBIM con Alternating Minimisation Algorithm (AMA) y su interacción con Abaqus en la simulación del ensayo a solape simple.

1. Variables de entrada proporcionadas por Abaqus.

**Tabla 3.1** Descripción de variables en la subrutina UINTER.

Variable	Descripción
rdisp(ndir)	Desplazamiento relativo entre superficies (normal y tangencial).
drdisp(ndir)	Incremento del desplazamiento relativo.
coords(mcrd)	Coordenadas globales del nodo.
node	Número de nodo asociado al punto.
kstep	Número del paso de carga.
kinc	Número de incremento dentro del paso.
time(2)	Tiempo total y tiempo del incremento.
dtime	Tamaño del incremento de tiempo.
ndir	Dimensión del problema en la interfase (normalmente 2D o 3D).

2. Propiedades del material que van a evaluarse.

Estas propiedades se definen en el archivo .inp como parte del material de interfase:

**Tabla 3.2** Propiedades de la subrutina UINTER.

PROPS (i)	Nombre	Símbolo	Descripción	Valor utilizado
PROPS (1)	Nodo inicial	$N_{ini}$	Índice (entero) del nodo/punto de integración de la interfase desde el que arranca la activación del daño.	1
PROPS (2)	Tensión crítica modo I	$\sigma_{ct}$	Tensión máxima admisible en dirección normal antes de iniciar el daño según el criterio tensional (CT).	50 MPa
PROPS (3)	Energía crítica modo I	$G_{Ic}$	Energía de fractura crítica en modo I. Base para construir la energía crítica total en función del modo de carga.	0.278571 MPa·mm
PROPS (4)	Parámetro de mezcla	$\lambda$	Parámetro de mixticidad 2D (Hutchinson–Suo).	0
PROPS (5)	Relación de rigideces	$\frac{k_t}{k_n}$	Relación entre rigidez tangencial y rigidez normal.	0.357143
PROPS (6)	Longitud característica	$L_e$	Longitud característica del elemento de interfase.	1
PROPS (7)	Parámetro de fragilidad	$\mu$	Parám. adimensional que enlaza el criterio tensional y el energético en el criterio acoplado.	100

## 3. Variables de estado

En la subrutina UINTER que se está estudiando, al final del análisis en cada nodo, se actualizan 15 variables de estado usando el vector STATEV. Estas variables permiten: Conservar información entre incrementos de carga, controlar la evolución del daño y almacenar datos relevantes para el postprocesado.

**Tabla 3.3** Variables de estado (STATEV) de la subrutina UINTER.

STATEV (i)	Nombre	Símbolo	Descripción
STATEV (1)	Daño total	$d$	Daño acumulado en el punto de integración. Vale 0 si la interfase está intacta y 1 si ha fallado completamente.
STATEV (2)	Número de nodo	–	Nodo. Se almacena con fines de control o depuración.
STATEV (3)	Ángulo de mezcla tensional	$\psi$	Ángulo de mezcla entre tracción y cizalladura, usado para calcular la energía crítica en el criterio tensional (CT).
STATEV (4)	Energía total CT	$G_{tot}^{CT}$	Energía total acumulada según el criterio tensional ( $G_I^T + G_{II}^T$ ).
STATEV (5)	Energía crítica CT	$G_c^T$	Energía crítica usada como umbral en el criterio tensional (dependiente de $\psi$ ).
STATEV (6)	Energía total CE	$G_{tot}^{CE}$	Energía acumulada según el criterio energético ( $G_I^E + G_{II}^E$ ).
STATEV (7)	Energía crítica CE	$G_c^E$	Energía umbral usada en el criterio energético. Se escala con el parámetro $\mu$ .
STATEV (8)	Energía modo I (CE)	$G_I^E$	Energía acumulada en modo I bajo criterio energético.
STATEV (9)	Energía modo II (CE)	$G_{II}^E$	Energía acumulada en modo II bajo criterio energético.
STATEV (10)	Signo de la tracción	$SIGNO_N$	Signo de la componente normal del desplazamiento relativo. Sirve para distinguir entre tracción y compresión.
STATEV (11)	Daño por CT	$d_T$	Variable binaria: 1 si el punto se ha dañado según el criterio tensional, 0 en caso contrario. Se mantiene constante dentro de cada paso $j$ .
STATEV (12)	Daño por CE	$d_E$	Variable binaria: 1 si el punto se ha dañado según el criterio energético, 0 en caso contrario. Puede variar dentro de un paso $j$ .
STATEV (13)	Daño del paso anterior	$d^-$	Valor del daño antes del incremento actual. Se usa para garantizar la irreversibilidad del daño.
STATEV (14)	Tensiones normales	$\sigma$	Valor de la tensión normal en el punto de integración.
STATEV (15)	Tensiones tangenciales	$\tau$	Valor de la tensión tangencial en el punto de integración.

### 3.3 Implementación en código de la UINTER

Abaqus proporciona a la subrutina un conjunto de variables de entrada que describen, para cada punto de integración, los desplazamientos relativos entre las superficies en contacto (RDISP), las propiedades del material (PROPS), el paso de carga (KSTEP, KINC) y las variables de estado del paso anterior (STATEV). A partir de esta información, la subrutina evalúa el estado tensional en la interfase, actualiza la matriz tangente constitutiva y calcula la evolución del daño según los criterios tensional y energético definidos en el modelo.

El funcionamiento interno del código que se ha utilizado para obtener los resultados del ensayo SLJ en el software Abaqus, ha sido realizado por María del Mar Muñoz Reja y queda anexo en este documento A.1. Se puede dividir en tres fases principales:

#### 1. Inicialización:

A partir de las propiedades del adhesivo, se calcula la rigidez inicial en modo normal y tangencial ( $K_{nn}$ ,  $K_{tt}$ ). Estas rigideces se degradan en función del daño acumulado. Se leen las propiedades del material y se determinan los valores iniciales de daño (damage, damageT, damageE) en función del incremento actual. Si es el primer incremento del análisis, se inicializan a cero; en caso contrario, se recuperan de STATEV.

```

c MATERIAL PROPERTIES
  Nini      = PROPS(1)
  sigmact   = PROPS(2)
  GIct      = PROPS(3)
  lambdaHS  = PROPS(4)
  ktkn      = PROPS(5)
  Le        = PROPS(6)
  mu        = PROPS(7)

c CALCULO RIGIDECECES
  KnnInter  = Le*(sigmact**2)/(2*GIct)
  KttInter  = KnnInter*ktkn

c INICIALIZACION
  Pi        = ACOS(-1d0)
  GiT       = 0.0d0
  GiiT      = 0.0d0
  GiE       = 0.0d0
  GiiE      = 0.0d0

  IF ((kinc*kstep).eq.1)THEN
    damage   = 0.00d0
    damagemenosK = 0.00d0
  ELSEIF ((kinc*kstep).eq.kstep)THEN
    damagemenosK = statev(1)
    damage      = statev(1)
    damageT     = 0.00d0
    damageE     = 0.00d0
    dds         = 0.0d0
    psig        = 0.0

```

```

ELSE
  damagemenosK = statev(13)
  damage       = statev(1)
  !siempre sera cero, desde k=1 y j=1 hasta que cambie
  damageT      = statev(11)
  !siempre sera cero, desde k=1 y j=1 hasta que cambie
  damageE      = statev(12)
  !siempre sera cero, desde k=1 y j=1 hasta que cambie
ENDIF

```

## 2. Cálculo Constitutivo:

Se actualiza la matriz de rigidez DDS. Posteriormente, se calculan las tensiones mediante un modelo elástico lineal a partir de los desplazamientos relativos. También se determina la energía almacenada y disipada en la interfase, tanto en modo I como en modo II.

Se determina si el punto está en tracción o compresión, usando el signo del desplazamiento relativo normal.

Se aplican factores de degradación del daño a las rigideces, reduciendo  $K_{nn}$ ,  $K_{tt}$  si hay daño, tomando un valor de 0.

```

c   signoN es el signo de la deformacion normal
c   -1.0 para strain de compresion, 1.0 para traccion o cero
  signoN=SIGN(1.d0,(-RDISP(1)))
  if (signoN.le.0.00d0) then
    funN = 1.0d0
  else
    funN = 1.0d0 - damage
  end if
  funT   = 1.0d0 - damage

c   RIGIDECES
  Knn    = KnnInter*funN
  Ktt    = KttInter*funT

c   ACTUALIZACION MATRIZ RIGIDEZ Y TENSIONES
  DDS(1,1) = Knn
  DDS(2,2) = Ktt

  STRESS(1)= DDS(1,1)*(RDISP(1))
  STRESS(2)= DDS(2,2)*(RDISP(2))

c   DETERMINACIÓN MATRIZ TANGENTE
  DO i=1,2
    DO j=1,2
      DDSDDR(i,j)=DDS(i,j)
    ENDDO
  ENDDO

```

### 3. Evolución del daño:

El daño se evalúa en dos etapas:

- Criterio tensional (CT): Se activa si la energía disipada supera un umbral dependiente del ángulo de mezcla entre modos I y II.
- Criterio energético (CE): Evalúa si la energía total disipada alcanza una energía crítica  $G_c^E$ .

Primero se calcula la energía total según el criterio tensional y después según el criterio energético. También se han calculado los valores críticos de energía para ambos criterios. Posteriormente se compararan ambos para la determinación del daño.

```

c   CALCULO DE LAS VARIABLES DEL PMTE para todos los PI de las
    interfases

c   CALCULO DE ENERGIA DEL CRITERIO TENSIONAL
    GiT   = (STRESS(1))**2.d0/(2.d0*KnnInter)
    GiiT  = (STRESS(2))**2.d0/(2.d0*KttInter)

c   CALCULO DE ENERGIA DEL CRITERIO ENERGETICO
c   RDISP = desplazamiento relativo al final de la iteración
    GiE   = KnnInter*((RDISP(1))**2.d0)/(2.d0)
    GiiE  = KttInter*((RDISP(2))**2.d0)/(2.d0)

c   CALCULO E.CRITICA EN LA 1ªITERACION PARA CT Y CE
c   en la UINTER el desplaz. de despegue es - y de contacto +
    if (kinc.eq.1) then
        psig = datan2(STRESS(2)*dsqrt(1/ktkn),-STRESS(1))
        Gct  = (GIct)*(1.d0+(dtan(psig*(1.d0-lambdaHS)))**2.d0)
    psiGcrit = pi/(2.d0*(1.d0-lambdaHS))

        IF(abs(psig).ge.psiGcrit) Gct=GIct*1.d8
        GcE   = Gct*mu

c   CALCULO E.TOTAL EN LA 1ª ITERACION PARA EL CT
c   !la misma en todo el el AMA
        IF (signoN.GT.0.DO)THEN
            GtotT = GiT+GiiT
        ELSE
            GtotT = GiiT
        ENDIF
    else

c   si NO es la 1ªiteracion se debe tomar las E.criticas y las
    totales del CT de las variables de estado porque es igual que
    tomarlo de la primera ITR.
        psig   = statev(3)
        Gct    = statev(5)
        GcE    = Gct*mu
        GtotT  = statev(4)
    endif

```

```

c    CALCULO E.TOTAL PARA CUALQUIER ITERACION PARA EL CE
IF (signoN.GT.0.D0)THEN
    GtotE = GiE+GiiE
ELSE
    GtotE = GiiE
ENDIF

```

Finalmente, el código garantiza irreversibilidad: solo evalúa daño si el nodo venía sin dañar ( $\text{damagemenosK} \approx 0$ ). En ese caso, en el primer incremento del step ( $\text{kinc}=1$ ) comprueba el criterio tensional (CT) comparando la energía tensional total  $G_{tot}^T$  con su umbral  $G_c^T$ ; si se supera, activa  $\text{damageT}=1$  y fija el estado inicial del criterio energético (CE) ( $\text{damageE}$ ) según Nini. En los incrementos posteriores ( $\text{kinc}>1$ ) no vuelve a evaluar CT y solo evalúa el CE comparando  $G_{tot}^E$  con  $G_c^E$ . Luego combina ambos criterios con una lógica AND estricta: el daño definitivo  $\text{damage}$  solo es 1 si CT y CE están activos.

```

c    CALCULO DEL DAGNO DEL CT, CE y DEFINITIVO
c    Para el calculo del CT y CE unicamente se debe contar con los
c    PI NO dagnados en los pasos anteriores
c    En el damageE, unicamente se decide los diferentes inicios
c    dependiendo del CT
IF (damagemenosK.le.1d-18) THEN !cumple irreversibilidad
  if (kinc.eq.1) then
    if (GtotT.ge.GcT) then !cumple CT
      damageT=1.d0 !PI dagnado
      if (abs(Nini-2.d0).le.1d-18) damageE = 1.d0
      !inicio todo dagnado del CT
      if (abs(Nini-1.d0).le.1d-18) damageE = 0.d0
      !inicio nada dagnado del CE
    end if !Se fija el CT y damageT
  else
    if (GtotE.ge.GcE) then
      damageE = 1.d0
    else
      damageE = 0.d0
    end if
  end if

c    CRITERIO ACOPLADO CT + CE
if ((abs(damageT).le.1d-18).or.(abs(damageE).le.1d-18)) then
  damage = 0.d0
else
  damage = 1.0
end if

ENDIF ! GARANTIZA IRREVERSIBILIDAD

```

Una vez fijado el daño dentro del bucle de irreversibilidad, el programa pasa a preparar las energías asociadas a cada nodo para el cálculo del funcional y el postproceso. Si el punto sigue sin dañarse, se pone  $G_c^E=0$  para que no sume a la energía disipada y se almacena toda la energía elástica ( $G_i^E + G_{ii}^E$ ). Si el nodo ya venía roto de incrementos anteriores, se vuelve a anular  $G_c^E$  y únicamente se contabiliza la energía normal en compresión, ya que una interfase dañada no transmite tracción. Finalmente, si el nodo rompe en ese mismo incremento, también se cuenta solo la parte a compresión, pero en este caso  $G_c^E$  no se anula, de forma que quede registrada la energía disipada por la rotura en ese paso.

```

IF (damage.le.1d-18) THEN
  GcE = 0.d0
  GtotE = GiE+GiiE
ELSEIF (damagemenosK.GT.1d-5) THEN
  !si no rompe en este paso solo suma energia a compresion
  GcE = 0.d0
  GtotE = GiE*((1.d0-signoN)/2.d0)
  !solo se sumaria energia si esta a compresion porque ya esta
  roto del paso anterior
ELSE
  GtotE=GiE*((1.d0-signoN)/2.d0)
ENDIF

```

Por último, se actualizan las variables de estado (STATEV) con el daño, energías y otras variables necesarias para el post-procesado.

El código permite así representar la nucleación y propagación del fallo en una interfase adhesiva, haciendo uso de variables internas que se almacenan en el archivo .odb de resultados.

```

c  SALIDA DE DATOS
statev(1) = damage
statev(2) = node
statev(3) = psig
statev(4) = GtotT
statev(5) = Gct
statev(6) = GtotE
statev(7) = GcE
statev(8) = GiE
statev(9) = GiiE
statev(10) = signoN
statev(11) = damageT
statev(12) = damageE
statev(13) = damagemenosK
statev(14) = -STRESS(1)
statev(15) = -STRESS(2)

```

### 3.4 Ejecución automatizada del análisis con Subrutina UINTER

En el script en Python anexo, [A.2], desarrollado por la profesora M. Mar Muñoz-Reja, se automatiza la ejecución de un análisis en Abaqus que utiliza una subrutina de usuario. En primer lugar, elimina los archivos intermedios generados en ejecuciones anteriores (.dat, .msg, .sta, .odb, etc.), asegurando un entorno limpio. A continuación, lanza el análisis mediante una llamada al ejecutable de Abaqus, especificando el archivo de entrada (.inp) y la subrutina UINTERLEBIMAMA, [A.1].

### 3.5 Implementación de CCFFM+LEBIM según PMTE-SC

La subrutina UINTER implementa un modelo de fractura basado en el LEBIM con esquema de AMA. Su objetivo es evaluar la evolución del daño en una interfase adhesiva bajo carga, combinando el criterio tensional y el energético. El procedimiento asegura la irreversibilidad: un punto dañado no puede recuperar rigidez. Cabe señalar que el detalle del proceso de activación no constituye un aspecto central en el presente trabajo. No obstante, se incluye en este apartado por su especial relevancia en investigaciones posteriores, donde servirá de base para un análisis más profundo del daño en la interfase.

En primer lugar, la subrutina determina las rigideces iniciales de la interfase a partir de las propiedades materiales y, con los desplazamientos relativos entre adherentes, calcula las tensiones normales y tangenciales. A partir de estas magnitudes se obtienen las energías de cada criterio: en el CT, mediante funciones cuadráticas de las tensiones; y en el CE, empleando directamente los desplazamientos y rigideces no degradadas para cuantificar la energía en modos normal y tangencial.

Durante la primera iteración, la subrutina evalúa la energía crítica del CT ( $G_c^T$ ), definida mediante una superficie de interacción de tipo Hutchinson–Suo que depende del ángulo de mezcla de modos ( $\psi_G$ ). A partir de  $G_c^T$ , se calcula la energía crítica del CE ( $G_c^E = \mu \cdot G_c^T$ ), que establece el umbral para el criterio energético. En este punto se fijan los valores iniciales de daño tensional (damageT) y energético (damageE), según la condición de inicio Nini.

El proceso de activación se organiza en dos etapas. En el primer incremento, se comprueba si  $G_{tot}^T \geq G_c^T$ ; si se cumple, se activa el daño por CT y se inicializa el CE según el estado impuesto por Nini. En los incrementos posteriores, el CT ya no se reevalúa y únicamente se verifica el CE, activándose cuando  $G_{tot}^E \geq G_c^E$ . El daño definitivo en el punto se establece mediante una lógica estricta: solo se considera roto (damage=1) si ambos criterios están activos simultáneamente.

Finalmente, fuera del bucle de irreversibilidad, la subrutina prepara las magnitudes de energía críticas y acumuladas que se emplearán en el cálculo del funcional global. Si el punto está sano, se acumula toda la energía elástica. Si ya estaba roto en incrementos anteriores, únicamente se contabiliza la energía en compresión normal, coherente con el comportamiento unilateral de la interfase. Si el punto rompe en ese mismo incremento, se incluye además la energía disipada correspondiente a la fractura. Todos estos valores se almacenan en el vector de variables de estado (statev) para su uso en pasos siguientes y en el postprocesado.

En conjunto, la subrutina UINTER proporciona un marco robusto para simular la fractura en uniones adhesivas, combinando criterios tensionales y energéticos bajo un esquema de activación mixta adaptativa, lo que permite capturar de manera consistente el inicio y la propagación del daño en función de las condiciones locales de carga.

## 4 Resultados Numéricos

---

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos mediante simulaciones por el método de los elementos finitos (MEF) en **ABAQUS/Standard**, software que permite el análisis estructural lineal y no lineal, el modelado de contactos y materiales avanzados, así como la incorporación de subrutinas de usuario. Se representarán las soluciones del ensayo SLJ, que posteriormente se compararán con referencias analíticas, manteniendo el mismo sistema de unidades y condiciones de contorno descritas previamente.

Como es habitual en trabajos basados en MEF, se inicia con un estudio de convergencia para asegurar que la solución es independiente de la discretización espacial y posteriormente se presentan los resultados numéricos.

### 4.1 Estudio de Convergencia

El análisis numérico mediante MEF es una herramienta esencial en el estudio de uniones adhesivas desde la mecánica de la fractura, ya que permite obtener distribuciones precisas de desplazamientos, tensiones, energía y daño en la interfase. En configuraciones tipo SLJ, caracterizadas por campos de tensiones complejos y concentraciones localizadas, el MEF ofrece una aproximación adecuada para predecir la iniciación y propagación del fallo.

Este método consiste en discretizar el dominio continuo del problema (la unión adhesiva) en un número finito de elementos conectados entre sí en nodos. En el interior de cada elemento se aproximan las incógnitas del problema, tales como los desplazamientos en los nodos o las variables de daño, mediante funciones de forma. A partir de esta aproximación, se resuelve numéricamente el equilibrio teniendo en cuenta las propiedades del material, el contacto entre cuerpos y los mecanismos de fallo definidos (criterio tensional o energético).

El fundamento matemático del FEM se basa en la formulación débil del problema, que consiste en expresar las ecuaciones de equilibrio de forma integral. Esto posibilita la resolución de problemas con geometrías complejas, materiales no lineales y condiciones de contorno realistas, como las que caracterizan los ensayos de SLJ con interfaces adhesivas susceptibles al daño.

Sin embargo, la precisión de los resultados depende de la calidad de la malla. Una malla gruesa o inadecuada no captura correctamente los gradientes de tensiones ni la evolución del daño, mientras que un refinamiento excesivo incrementa el coste computacional sin mejorar sustancialmente la

solución, además de que podría introducir efectos numéricos no deseados.

Por esta razón, es imprescindible en un trabajo basado en el FEM, llevar a cabo un Estudio de Convergencia que permita evaluar como varían las magnitudes de interés (desplazamientos, tensiones en la interfase o energía disipada) a medida que se reduce el tamaño de los elementos en la zona crítica del modelo. El objetivo de este capítulo consiste en comprobar que, a partir de cierto refinamiento de la malla, los resultados obtenidos permanecen prácticamente constantes, lo que indicaría que la solución ha convergido y es representativa del comportamiento del sistema.

Para ello, se han realizado numerosas simulaciones en Abaqus, generando diferentes versiones del modelo con diferentes tamaños de elemento en las esquinas del solape. Se comparan las soluciones obtenidas para evaluar la estabilidad de las soluciones y justificar la elección de una malla óptima que ofrezca un equilibrio entre precisión numérica y eficiencia computacional.

#### 4.1.1 Criterio de Evaluación

En este estudio de convergencia se ha seleccionado como variable de referencia **las tensiones en los extremos del solape de la unión adhesiva SLJ**, tanto por su relevancia mecánica como por la necesidad de validar los resultados numéricos frente a modelos analíticos.

Desde la mecánica de la fractura, dichos extremos concentran las mayores tensiones normales y tangenciales debido a la configuración geométrica de la unión, siendo responsables del inicio del daño y, por tanto, de la resistencia estructural.

Sin embargo, en este proyecto, el estudio de convergencia persigue un objetivo adicional: contrastar los resultados de Abaqus con los valores analíticos calculados mediante un código (que será explicado posteriormente) basado en formulación analítica haciendo uso de Wólfram Mathematica. Para que esta comparación sea rigurosa, se llevó a cabo un refinamiento progresivo de la malla en la zona crítica del solape, garantizando que las tensiones extraídas del modelo no estuviesen condicionadas por el tamaño de los elementos ni por efectos de discretización.

#### 4.1.2 Definición de los Estudios Realizados

A continuación, se presentan dos análisis complementarios. En primer lugar, se realiza un estudio de convergencia de la malla, evaluando la influencia del tamaño de elemento en los resultados obtenidos. En segundo lugar, se desarrolla un estudio del error relativo de las tensiones respecto a una solución de referencia, con el fin de cuantificar la precisión del modelo para las magnitudes de interés.

Para calcular el error relativo, se aplica la siguiente fórmula:

$$e_r = \frac{|\sigma_{num} - \sigma_{ref}|}{|\sigma_{ref}|} \times 100 \quad (4.1)$$

donde:

- $\sigma_{num}$  es el valor obtenido numéricamente
- $\sigma_{ref}$  es el resultado analítico de referencia, que se obtiene haciendo uso del archivo de Wolfram Mathematica que se ha utilizado para obtener la solución analítica. Dicho archivo será explicado en profundidad en el próximo capítulo.

De forma previa a mostrar los resultados de cada uno de los estudios, se van a indicar tanto la configuración de los estudios realizados, como una descripción de las mallas que han sido comparadas.

### 4.1.3 Configuración de los Estudios Realizados

En el modelo se emplean elementos CPE4 (Continuum Plane Strain de 4 nodos) debido a que la probeta se analiza bajo la hipótesis de deformación plana, condición adecuada cuando la dimensión en la dirección perpendicular al plano de análisis es grande y se mantiene constante, impidiendo deformaciones fuera de dicho plano.

Las **condiciones de contorno** se definen de la siguiente manera:

- En el extremo derecho, el nodo central dispone de un apoyo de bolas, que impide el desplazamiento en las direcciones  $x$  e  $y$ .

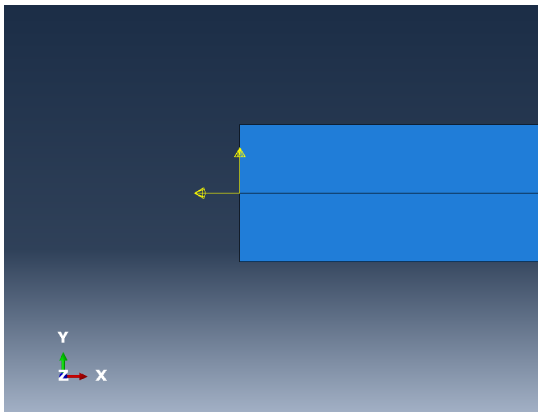


Figura 4.1 CC. Extremo Izquierdo.

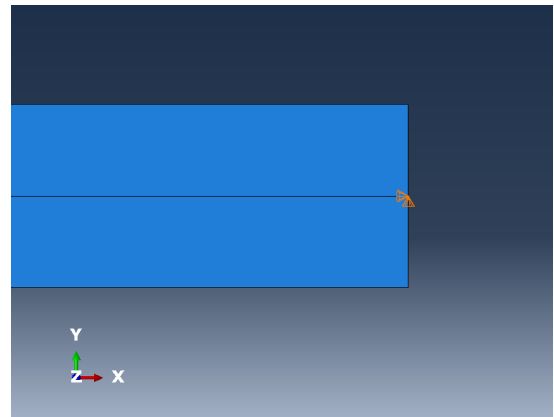


Figura 4.2 CC. Extremo Derecho.

La **carga aplicada** se introduce en el extremo izquierdo mediante una fuerza concentrada en el nodo central con dos componentes:

- Componente vertical ( $F_y$ ).
- Componente horizontal ( $F_x$ ).

#### 1. Propiedades del Adherente

Tabla 4.1 Propiedades del adherente 4.3.

Módulo de Young $E$ [MPa]	$\nu$	$l$ [mm]	$t$ [mm]	$b$ [mm]
70000	0.34	256	1.6	1

Donde el parámetro  $E$  corresponde al módulo de Young, mientras que  $\nu$  representa el coeficiente de Poisson. En cuanto a las dimensiones,  $t$  denota el espesor del adherente y  $b$  su profundidad en la dirección perpendicular al solape.

## 2. Propiedades del Adhesivo

**Tabla 4.2** Propiedades del adhesivo 4.3.

Módulo de Young $E_c$ [MPa]	$\nu_c$	$\eta$ [mm]	$2c$ [mm]	$K_t$ [MPa/mm]	$K_n$ [MPa/mm]
560	0.40	0.1248	102.4	1602.56	4487.18

De forma análoga,  $E_c$  corresponde al módulo de Young del material adhesivo y  $\nu_c$  a su coeficiente de Poisson. El espesor de la capa adhesiva se representa mediante  $\eta$ , mientras que  $2c$  indica la longitud de solape. Además, se incluyen las rigideces normales  $K_n$  y tangenciales  $K_t$ , expresadas en unidades de [MPa/mm], que caracterizan el comportamiento elástico lineal de la interfase adhesiva.

**Tabla 4.3** Propiedades críticas del adhesivo.

$\sigma_{ct}$ [MPa]	$G_{Ic}$ [MPa·mm]	$\mu$
50	0.278571	100

## 3. Características del Step

**Tabla 4.4** Características del Step.

Tipo de análisis	Análisis estático con estabilización numérica
Análisis no lineal geometría	Sí
Tiempo total del paso	1
Incremento inicial	1
Tolerancia	1e-06
Tiempo mínimo del incremento	1

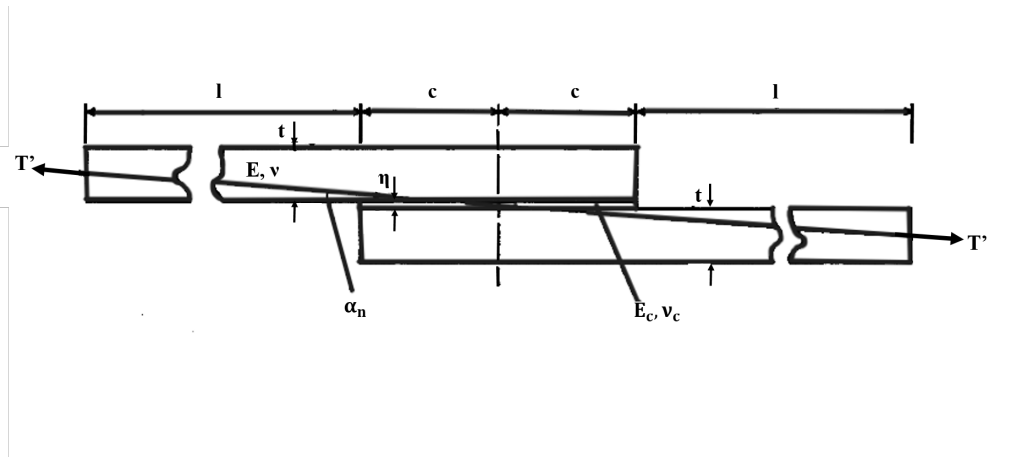
## 4. Cargas Aplicadas

**Tabla 4.5** Cargas aplicadas.

Fuerza [N]	Componente horizontal $F_x$ [N]	Componente vertical $F_y$ [N]
1	0.999996609	0.002604158
10	9.999966092	0.026041578
100	99.99966092	0.260415784
600	599.9979655	1.562494702

El ángulo utilizado para el cálculo de ambas componentes se define de la siguiente forma:

$$\alpha_n = \arctan\left(\frac{1.6}{614.4}\right) \quad (4.2)$$



**Figura 4.3** Representación del ángulo  $\alpha_n$  que forma la Carga en el ensayo SLJ [22].

#### 4.1.4 Características de las mallas

El diseño del mallado se ha diseñado con un refinamiento localizado en los extremos del solape, donde aparecen las mayores concentraciones de tensiones, empleando elementos más grandes en las zonas alejadas para reducir el coste computacional. Esta estrategia equilibra precisión y eficiencia.

Se presenta una tabla comparativa con la geometría de las diferentes mallas que se han estudiado:

**Tabla 4.6** Características de las Mallas.

MALLAS	DIMENSIÓN VERTICAL		DIMENSIÓN HORIZONTAL		Nº ELEMENTOS
	Solape	Lateral libre de tensiones	Centro solape	Extremos solape	
MALLA 1	0.2	0.2	0.2	0.2	28 673
MALLA 2	0.1	0.1	0.1	0.1	114 689
MALLA 3	0.1	0.2	0.25	0.05	20 929
MALLA 4	0.05	0.05	0.1	0.01	243 841
MALLA 5	0.01	0.01	0.1	0.005	1 468 801

### 1. MALLA 1

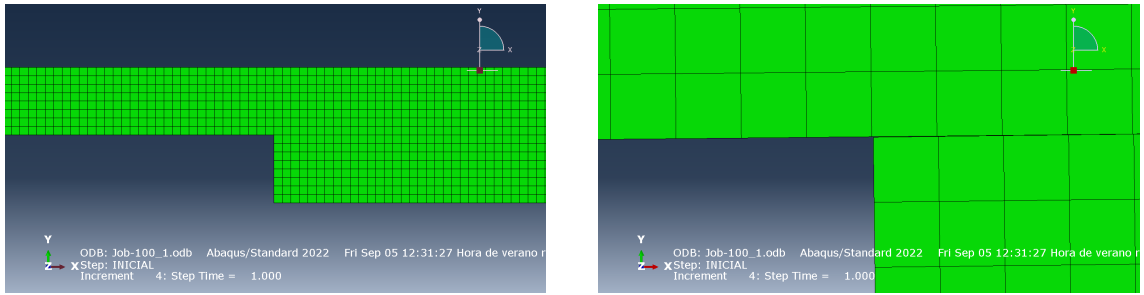


Figura 4.5 Descripción de la Malla 1.

### 2. MALLA 2

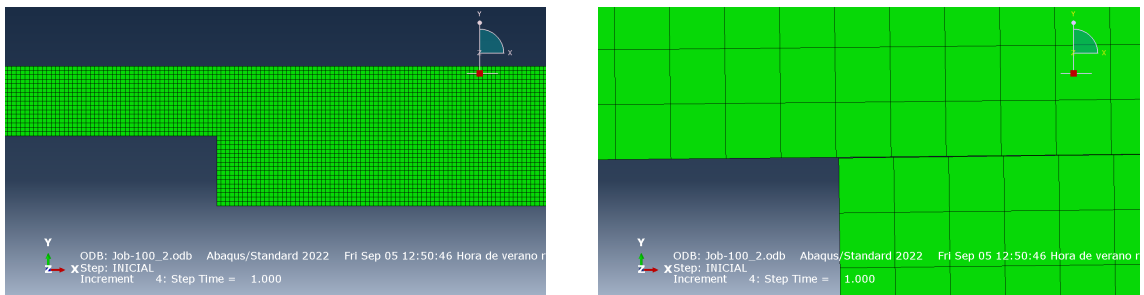


Figura 4.6 Descripción de la Malla 2.

### 3. MALLA 3

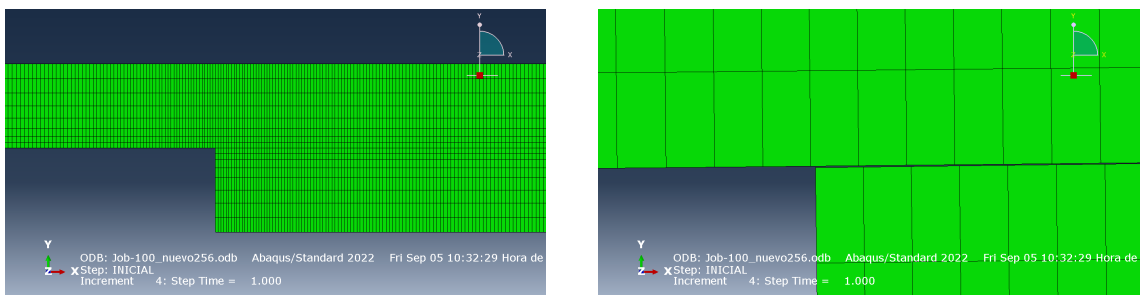


Figura 4.7 Descripción de la Malla 3.

#### 4. MALLA 4

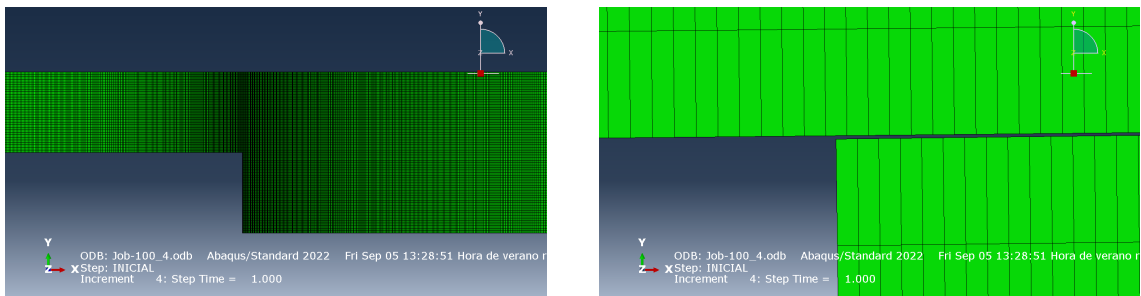


Figura 4.9 Descripción de la Malla 4.

#### 5. MALLA 5

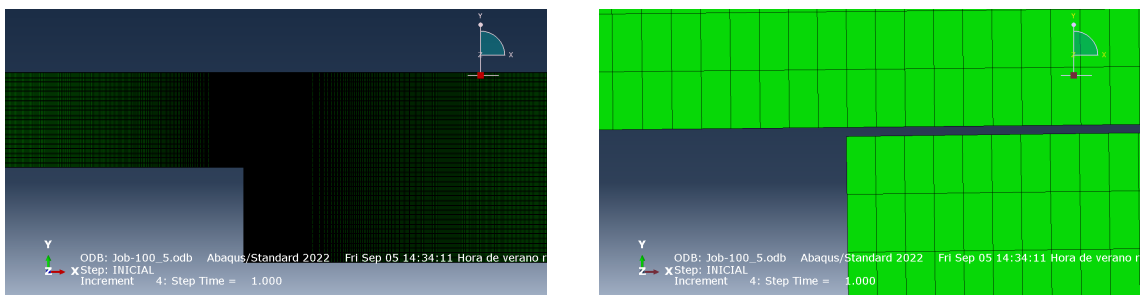


Figura 4.10 Descripción de la Malla 5.

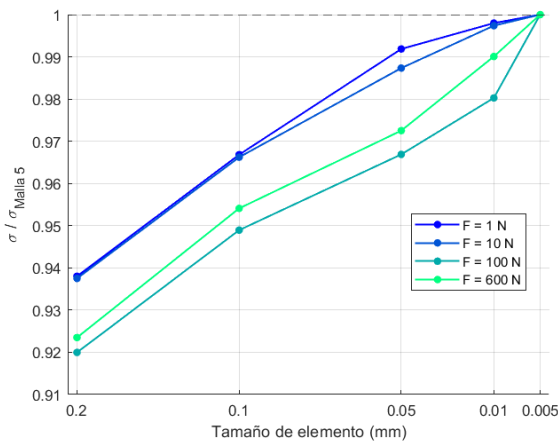
Se adjuntan un conjunto de fotos para cada malla que permiten esclarecer de manera mas visual los valores mostrados en la tabla 4.6.

#### 4.1.5 Resultados del Estudio de Convergencia

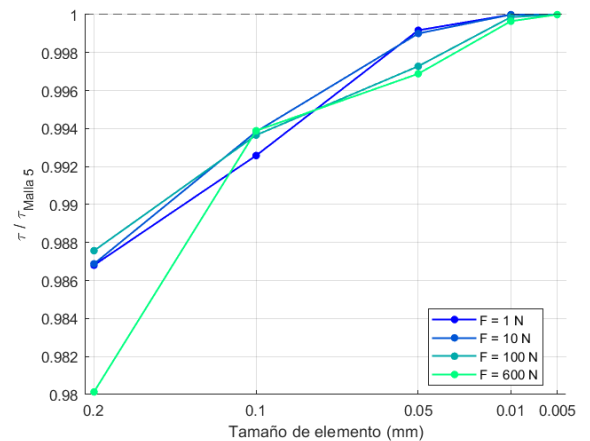
En primer lugar, se ha representado la convergencia de las tensiones normales y tangenciales de forma **adimensionalizada**, dividiendo cada valor obtenido entre el correspondiente al caso de referencia con la malla más refinada ( $h = 0.005$  mm). La magnitud adimensional se calcula como

$$\sigma^*(h) = \frac{\sigma(h)}{\sigma(h_{\text{ref}})} \quad \text{y} \quad \tau^*(h) = \frac{\tau(h)}{\tau(h_{\text{ref}})}, \quad (4.3)$$

donde  $h_{\text{ref}} = 0.005$  mm. De este modo, todas las curvas tienden a la unidad cuando el tamaño de elemento se aproxima al valor mínimo considerado, lo que permite una comparación directa entre distintos niveles de carga.



**Figura 4.11** Convergencia de las Tensiones Normales  $\sigma$ . **Figura 4.12** Convergencia de las Tensiones Tangenciales  $\tau$ .



Los resultados muestran que, conforme se reduce el tamaño de elemento, tanto las tensiones normales como las tangenciales se aproximan progresivamente al valor de referencia. Aunque se observan ligeras diferencias en el grado de convergencia en función de la carga aplicada (más acusadas en el caso de las tensiones normales), todas las curvas terminan estabilizándose en torno a la unidad, lo que confirma la validez de la malla de referencia y aporta confianza en la robustez de los resultados obtenidos.

Por otro lado, del estudio de convergencia realizado se concluye que la malla 3, con un tamaño de elemento de 0.05 mm, ofrece una solución suficientemente precisa, presentando resultados ya convergidos con respecto a los obtenidos mediante discretizaciones más refinadas. Esta malla consta de 20 929 elementos, frente a los más de 24 000 elementos de la siguiente (0.01 mm) y a los aproximadamente 1.5 millones de elementos de la malla más refinada, cuyo coste computacional resulta indamisible debido al elevado tiempo de cálculo requerido. Por tanto, la elección de la malla 3 supone un compromiso adecuado entre exactitud en los resultados y eficiencia computacional, garantizando la validez del modelo numérico en el desarrollo posterior del trabajo.

Cabe destacar que resulta relevante analizar el comportamiento para distintos niveles de carga, ya que la presencia de no linealidad geométrica en el problema puede influir en la evolución de las tensiones y, por tanto, en la validez de las conclusiones extraídas del estudio de convergencia.

Con el objetivo de reforzar el estudio de convergencia realizado, se han calculado los errores relativos correspondientes a la malla seleccionada (malla 3). Una explicación detallada del mismo se encuentra en la sección 4.1.2 de este capítulo

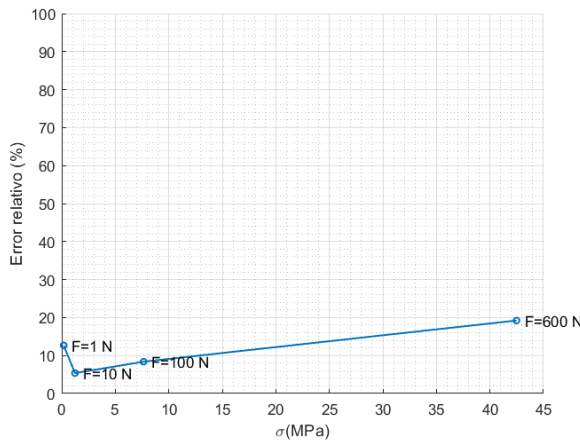


Figura 4.13 Error relativo de las Tensiones Normales  $\sigma$ .

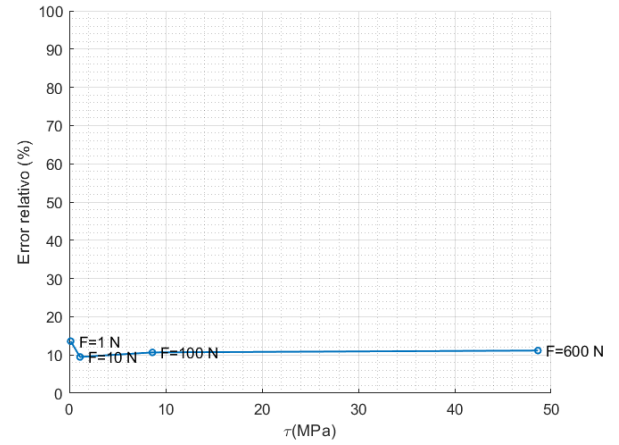


Figura 4.14 Error relativo de las Tensiones Tangenciales  $\tau$ .

Los resultados muestran que los errores asociados a las tensiones normales y tangenciales permanecen en valores reducidos para las distintas cargas analizadas, confirmando así la validez de la discretización adoptada. En particular, se observa que el error relativo se mantiene por debajo de un 20 % incluso en el caso más desfavorable (carga de 600 N), mientras que para cargas inferiores los errores disminuyen de forma notable, situándose próximos al 5 %. Estos resultados respaldan la elección de la malla 3, al garantizar un equilibrio adecuado entre precisión numérica y eficiencia computacional.

Finalmente, se presentan los resultados del análisis combinado del error relativo en función del tamaño de elemento. Las gráficas permiten observar de manera conjunta la influencia del refinamiento de la malla sobre la precisión de las tensiones normales y tangenciales, proporcionando una visión más completa de la calidad de la discretización empleada.

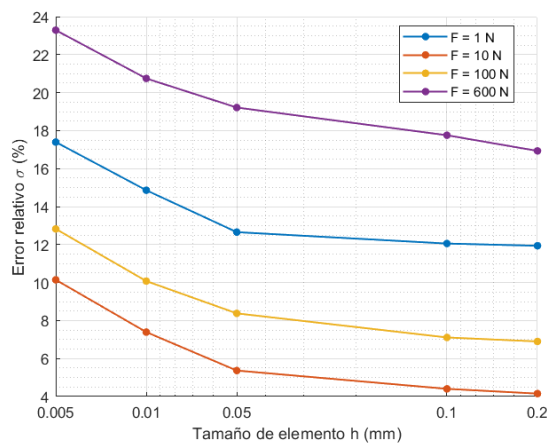


Figura 4.15 Error relativo de  $\sigma$  frente a  $h$ .

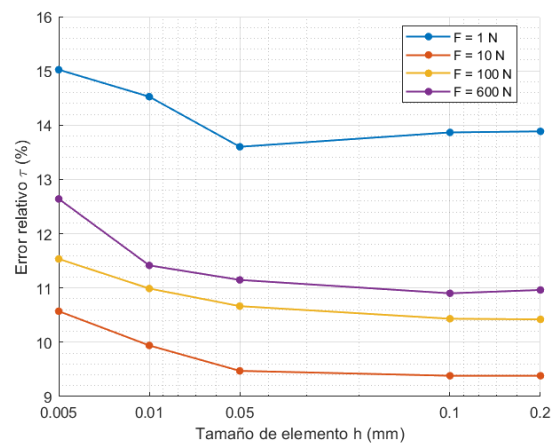


Figura 4.16 Error relativo de  $\tau$  frente a  $h$ .

Tal y como era previsible, se aprecia una disminución progresiva del error relativo a medida que se reduce el tamaño de los elementos. No obstante, la reducción de error lograda con mallas extremadamente refinadas resulta marginal en comparación con el incremento sustancial del coste computacional que implican. De este modo, aunque el refinamiento hasta tamaños de elemento muy pequeños mejora levemente la precisión, la ganancia obtenida no compensa el tiempo de cálculo adicional requerido.

En conclusión, el estudio de convergencia confirma la idoneidad de la malla 3 como la opción más adecuada para el desarrollo del trabajo. Esta malla ofrece un equilibrio óptimo entre precisión y eficiencia, garantizando resultados numéricamente convergidos sin incurrir en costes de simulación desproporcionados. Con ello se cierra el análisis de convergencia, quedando establecida la discretización a emplear en los apartados posteriores del estudio.

## 4.2 Análisis de las tensiones en la zona de solape

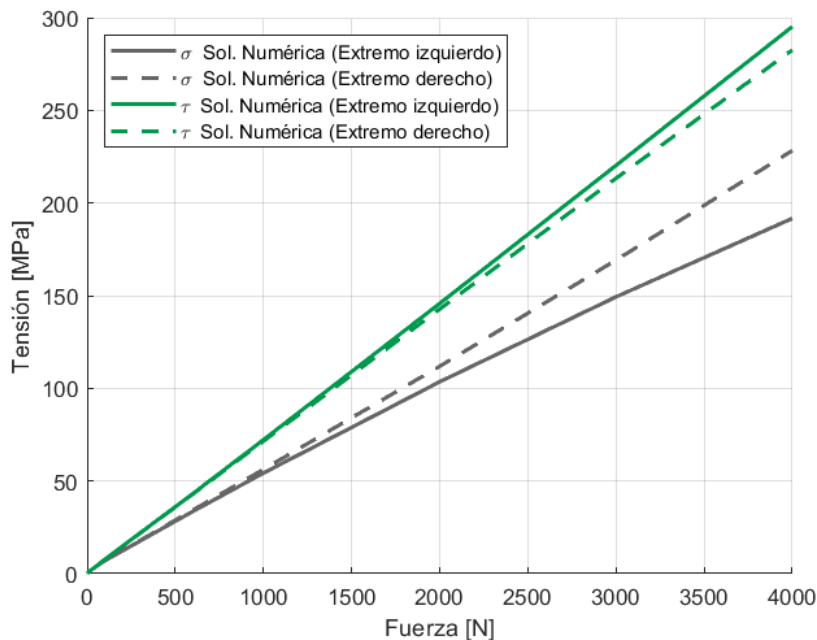
Los resultados numéricos que se presentan en este apartado corresponden a un adhesivo de carácter flexible, definido por una relación  $E_c/E = 0.008$  y a una configuración con  $l/c = 5$ , clasificada como un solape largo según la definición de Tsai y Morton (1994) [22]. Con el fin de aportar mayor claridad, en la Tabla 4.7 se recogen algunos parámetros geométricos relevantes empleados en el modelo. Para una mejor comprensión de la definición de cada uno de estos parámetros, se remite al lector a la Fig.4.3, donde se muestran de manera esquemática las magnitudes características de la unión.

**Tabla 4.7** Parámetros geométricos de la unión adhesiva 4.3.

$l$ [mm]	$c$ [mm]	$t$ [mm]	$\eta$ [mm]	$\alpha_n$ [rad]
256	51.2	1.6	0.1248	0.002604161

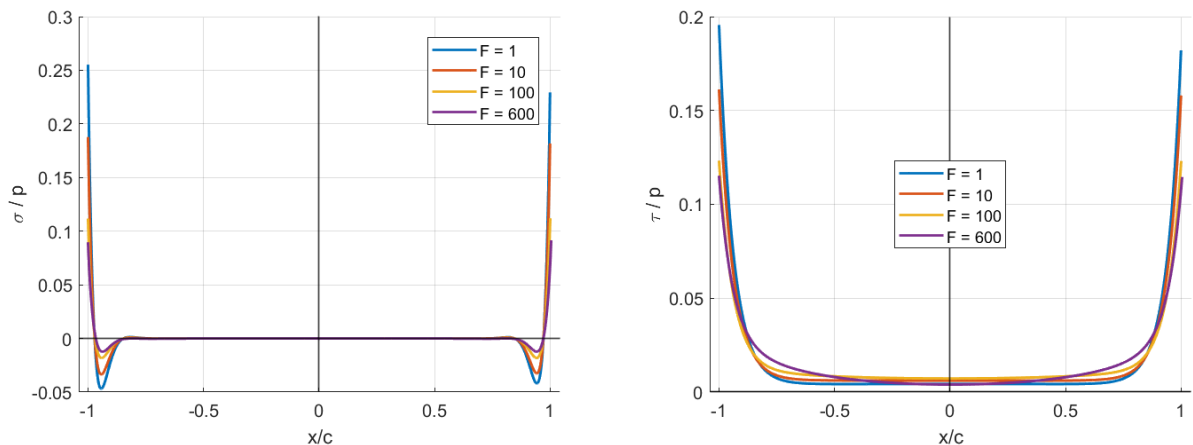
### 4.2.1 Tensiones frente al aumento de la Carga Aplicada

En la Figura 4.17 se representan las tensiones máximas obtenidas en el solape (en ambos extremos) en función de la fuerza aplicada, distinguiendo entre la componente normal  $\sigma$  y la componente tangencial  $\tau$ . Se observa en ambos casos una relación prácticamente lineal con la carga, lo que pone de manifiesto el comportamiento elástico del adhesivo en el rango de sollicitaciones considerado. Asimismo, se aprecia que las tensiones tangenciales alcanzan valores superiores a las normales para la misma magnitud de fuerza. Estos resultados numéricos serán posteriormente contrastados con soluciones analíticas. Cabe señalar que las tensiones obtenidas en los dos extremos del solape no son exactamente coincidentes, lo que refleja la falta de simetría en la solución numérica.



**Figura 4.17** Tensiones en ABAQUS.

## 4.2.2 Tensiones a lo largo del solape para distintas Cargas



**Figura 4.18** Distribución de Tensiones Normales  $\sigma$  a lo largo del solape. **Figura 4.19** Distribución de Tensiones Tangenciales  $\tau$  a lo largo del solape.

En las Figuras 4.18 y 4.19 se representan las distribuciones adimensionalizadas de las tensiones tangenciales  $\tau/p$  y normales  $\sigma/p$  a lo largo del solape para distintos valores de la carga  $F$ . Tal y como se observa, ambas tensiones presentan máximos localizados en los extremos de la unión ( $x/c = \pm 1$ ) y valores prácticamente nulos en la zona central. Esta tendencia confirma que los extremos son las regiones críticas de la unión, mientras que en la parte central las tensiones se reparten de manera uniforme.

En el caso de las tensiones tangenciales, la distribución es prácticamente simétrica y muestra un patrón muy marcado con concentraciones en los bordes y mínimos en la zona central. Por su parte, las tensiones normales reflejan igualmente un comportamiento concentrado en los extremos, aunque con oscilaciones de signo cerca de los bordes, lo que indica la existencia de zonas sometidas a tracción y compresión alternadas en esas regiones.

Cabe destacar que, aunque las curvas se han adimensionalizado mediante  $p = F/t$ , lo que debería conducir a distribuciones coincidentes para diferentes cargas en un régimen estrictamente elástico lineal, en los extremos del solape se aprecia una ligera pérdida de proporcionalidad. Dicho de otro modo, los valores de tensión normalizados en los bordes no permanecen constantes entre distintas cargas, a diferencia de lo que ocurre en la zona central donde las curvas se solapan casi perfectamente. Este efecto está asociado principalmente a la no linealidad del ensayo, siendo la excentricidad de la carga la causa fundamental de dicha pérdida de proporcionalidad, al provocar grandes desplazamientos.

Precisamente esta pérdida de proporcionalidad en los extremos explica que el inicio del daño en uniones adhesivas se produzca en dichos puntos. La acumulación de tensiones locales, unida a la sensibilidad del adhesivo frente a la combinación de tensiones normales y tangenciales, convierte a los bordes del solape en las zonas más susceptibles a la nucleación y propagación de grietas.

4.2.3 Curvas  $k$ - $\xi_c$

El parámetro  $k$  representa el Momento Adimensional en el borde del solape y se define como

$$k = \frac{2M_0}{Tt}, \tag{4.4}$$

donde  $M_0$  es el momento en el borde del solape,  $T$  la carga aplicada,  $t$  el espesor del adherente. Un modelo habitual para el momento en el borde es

$$M_0 = T(\alpha_n \ell - \delta_\ell), \tag{4.5}$$

siendo  $\alpha_n$  un parámetro geométrico (ángulo definido por la trayectoria de la carga) y  $\delta_\ell$  la deflexión relativa evaluada en  $x = \ell$ .

El parámetro  $\xi_c$  condensa la influencia conjunta de la geometría del solape y de las propiedades del material:

$$\xi_c = \frac{c}{t} \sqrt{12(1-\nu^2) \frac{p}{E}}, \quad p = \frac{T}{t}, \tag{4.6}$$

donde  $c$  es la semilongitud del solape,  $E$  el módulo de Young y  $\nu$  el coeficiente de Poisson del adherente.

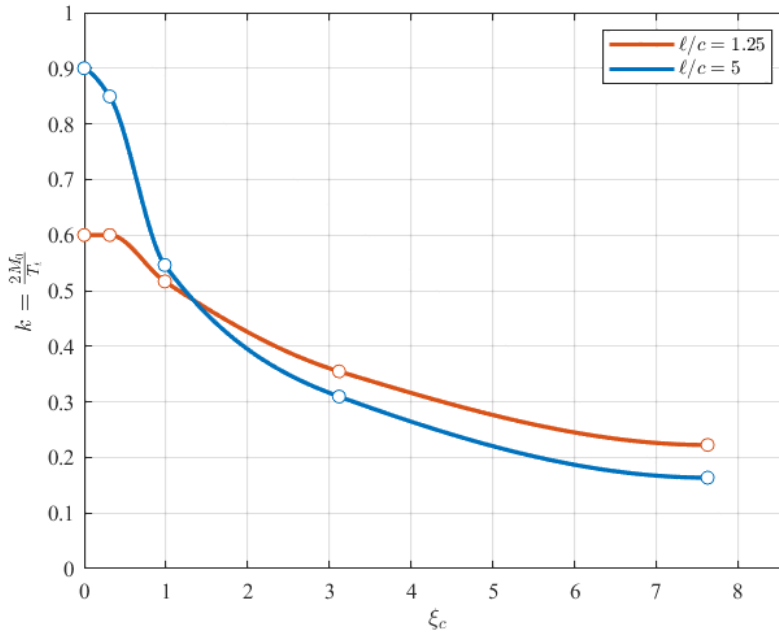


Figura 4.20 Curva  $k$  vs  $\xi_c$  para solape largo y adhesivo flexible.

En la Figura 4.20 se observa que, para valores bajos de  $\xi_c$ , la curva correspondiente a  $\ell/c = 5$  parte con valores de  $k$  ligeramente superiores. Esto es coherente con (4.5): el término proporcional a la longitud libre del adherente ( $T \alpha_n \ell$ ) domina inicialmente, de modo que una viga más larga incrementa el momento en el borde y, por tanto, el valor de  $k$  definido en (4.4).

Sin embargo, a medida que  $\xi_c$  aumenta (esto es, cuando crece la deformabilidad relativa del solape por efecto de  $c/t$  y de  $p/E$ ), el término de deflexión  $\delta_\ell$  gana peso en (4.5) y compensa el efecto de  $\ell$ . Como resultado, las curvas  $k(\xi_c)$  se aproximan hasta prácticamente solaparse para  $\xi_c$

moderados–altos. En este régimen, la influencia de la longitud libre  $\ell$  pasa a un segundo plano y el comportamiento queda gobernado principalmente por el parámetro adimensional  $\xi_c$  dado en (4.6).

En resumen, cuando  $\xi_c$  es bajo, en una viga más larga, ( $\ell$ ) tiende a aumentar el momento en el borde (y, por tanto,  $k$ ). En cambio, para los valores de  $\xi_c$  que interesan en el diseño, las curvas prácticamente coinciden: la influencia de  $\ell$  pasa a ser secundaria y es  $\xi_c$  el parámetro que realmente gobierna la comparación de configuraciones y la valoración de los efectos de flexión mediante  $k$ .

#### 4.2.4 Deflexión transversal en el solape

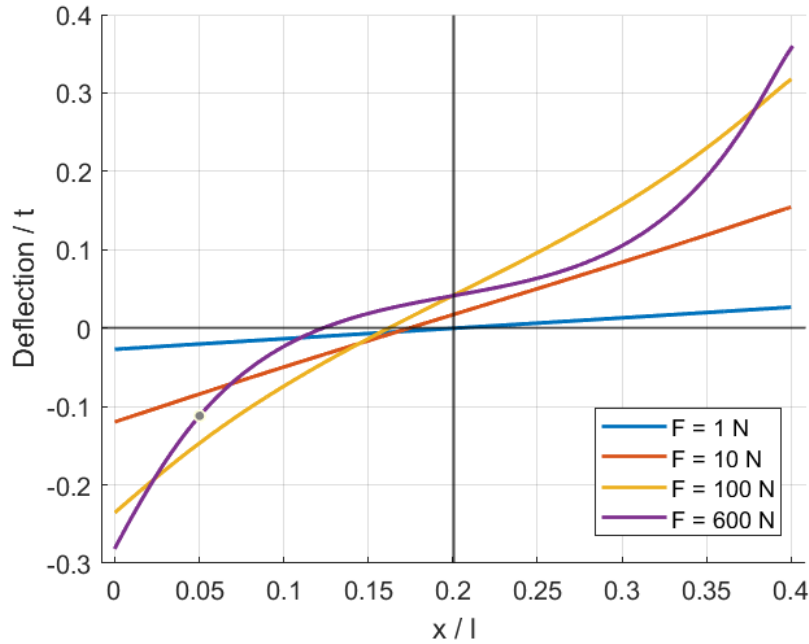


Figura 4.21 Deflexión transversal en el solape para el caso de  $l/c = 5$  con adhesivo flexible.

La Figura 4.21 muestra la deflexión transversal del adhesivo a lo largo del solape, adimensionalizada como  $(w/t)$ . La abscisa representa  $(x/\ell)$ : la coordenada ( $x$ ) recorre el solape desde el extremo izquierdo, y se normaliza con la longitud libre del adherente.

Se observa que la amplitud de la deflexión aumenta con la fuerza aplicada, lo cual es coherente con un régimen elástico: al crecer  $F$ , aumentan también las rotaciones de los adherentes y, en consecuencia, la curvatura impuesta al adhesivo. Sin embargo, las curvas no mantienen la proporcionalidad a medida que aumenta la carga. Mientras que para valores bajos de  $F$  las distribuciones presentan cierta semejanza, al incrementar la carga se aprecian diferencias más marcadas, como se observa claramente entre la curva correspondiente a  $F = 600 \text{ N}$  y la de  $F = 1 \text{ N}$ . Este efecto es esperable en un solape simple: la carga excéntrica induce un acoplamiento flexión–cortante y una rotación de los adherentes que no es idéntica en ambos bordes; además, la continuidad con los adherentes fuera del solape hace que las condiciones de contorno en los dos extremos no sean estrictamente espejo. Todo ello desplaza la “línea neutra” de deflexión y explica la pérdida progresiva de simetría observada.

La deflexión en los bordes del solape es especialmente relevante porque entra directamente en el cálculo del momento en el borde  $M_0$  y, por tanto, condiciona el momento adimensional  $k$ .

## 5 Resultados Analíticos

---

En este apartado se presentan los resultados obtenidos a partir de formulaciones analíticas clásicas aplicadas a uniones adhesivas de tipo solape simple. Concretamente, se emplean los modelos desarrollados por Goland y Reissner (1944), ampliamente reconocidos en la literatura para la estimación de las tensiones normales y tangenciales en los extremos del solape, regiones en las que dichas magnitudes alcanzan sus valores máximos debido a la concentración de esfuerzos.

Además, se analiza el comportamiento de estas tensiones frente a un incremento de la carga aplicada, destacando la evolución no lineal que presentan algunas de ellas. Este fenómeno se ve influenciado por los momentos flectores que aparecen como consecuencia de la excentricidad en la aplicación de la carga, aspecto característico de la geometría de este tipo de uniones, que también se calculan.

En definitiva, los cálculos expuestos en esta sección se fundamentan en las formulaciones de Goland y Reissner y de Chen, constituyendo una referencia analítica que servirá como base de comparación frente a los resultados numéricos obtenidos posteriormente mediante simulación por elementos finitos.

### 5.1 Estudio en Wolfram

En el presente apartado del capítulo, se procede a explicar el código de Wolfram Mathematica anexo [B.1], realizado por María del Mar Muñoz Reja, que calcula las tensiones en los extremos del solape de la unión SLJ. El desarrollo se basa en el artículo clásico de Goland y Reissner, “The Stresses in Cemented Joints” [11], y en la revisión de Tsai, “An Evaluation of Analytical and Numerical Solutions to the Single-Lap Joint” [22].

El código implementa las soluciones analíticas clásicas de Goland & Reissner (1944) para las tensiones en uniones adhesivas de solape simple, junto con la corrección de Chen (1983) [22]. Se calculan las distribuciones de esfuerzo cortante  $\tau(x)$  y normal  $\sigma(x)$  en el adhesivo, a partir de los parámetros geométricos y mecánicos de la unión, empleando los factores de borde  $k$  y  $k'$ . Estas expresiones permiten evaluar la concentración de tensiones en los extremos del solape, responsables del inicio del despegue del adhesivo.

1. La **primera parte** del código se denomina “**Solución de la ecuación diferencial**”:

Se resuelven y fijan las expresiones de  $\tau(x)$  y  $\sigma(x)$  del modelo de Goland–Reissner, con opción de corrección de Chen en  $k'$ , usando las longitudes características  $\lambda_\tau$  y  $\lambda_\sigma$  y los factores de momento de borde  $k$  y  $k'$ .

$\tau(x)$  describe cómo se transfiere la carga por cortante a través del adhesivo; predice máximos cerca de los bordes y un decaimiento hacia el interior.

$$\tau(x) = \frac{F}{4bl} \left[ (1+3k) \frac{l}{2\lambda_\tau} \cosh\left(\frac{x}{\lambda_\tau}\right) \sinh\left(\frac{l}{2\lambda_\tau}\right) + 3(1-k) \right], \quad (5.1)$$

donde:

- La longitud característica es:

$$\lambda_\tau = \sqrt{\frac{E h h_a}{8G_a}}, \quad (5.2)$$

- El factor de borde es:

$$k = \frac{2M_0}{F h}, \quad (5.3)$$

$\sigma(x)$  cuantifica las tensiones normales inducidas por el momento de borde (debido a la excentricidad de la carga), responsable de la mayor criticidad en los extremos del solape.

$$\begin{aligned} \sigma(x) = & \frac{Fh}{bR\lambda_\sigma} \left( \frac{k}{4R_1\lambda_\sigma} + \frac{k'}{l} \sinh\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) \sin\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) \right) \sinh\left(\frac{x}{\lambda_\sigma}\right) \sin\left(\frac{x}{\lambda_\sigma}\right) \\ & + \frac{Fh}{bR\lambda_\sigma} \left( \frac{k}{2R_2\lambda_\sigma} + \frac{k'}{l} \cosh\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) \cos\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) \right) \cosh\left(\frac{x}{\lambda_\sigma}\right) \cos\left(\frac{x}{\lambda_\sigma}\right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde:

- La longitud característica es:

$$\lambda_\sigma = \left( \frac{E h^3 h_a}{6E_a} \right)^{1/4} \quad (5.5)$$

- Las definiciones de Factor de borde son:

– Definición clásica de Goland:

$$k = \frac{2M_0}{F h}, \quad (5.6)$$

– Corrección de Chen:

$$k' = \frac{lV_0}{2Fh}. \quad (5.7)$$

- Funciones auxiliares son:

$$R = \frac{1}{2} \left[ \sinh\left(\frac{l}{\lambda_\sigma}\right) + \sin\left(\frac{l}{\lambda_\sigma}\right) \right]. \quad (5.8)$$

$$R_1 = \cosh\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) \sin\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) + \sinh\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) \cos\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right). \quad (5.9)$$

$$R_2 = \sinh\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) \cos\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) - \cosh\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right) \sin\left(\frac{l}{2\lambda_\sigma}\right). \quad (5.10)$$

## 2. El segundo bloque del código se denomina “Parámetros para dibujar”:

Se fijan las propiedades del problema y se derivan varias magnitudes auxiliares que después usa la solución analítica de Goland–Reissner y Chen para evaluar las tensiones en el solape.

- Propiedades de los adherentes:  
Se definen el módulo elástico  $E$ , el coeficiente de Poisson  $\nu$  y el espesor  $h$ . Además, se fija  $b=1$ , que equivale a trabajar por unidad de ancho (los resultados quedan “por mm de ancho”, útil cuando el modelo teórico asume una lámina ancha en deformación plana).
- Propiedades del adhesivo:  
Se introducen el espesor del adhesivo  $h_a$ , el módulo de Young  $E_a$  y el coeficiente de Poisson  $\nu_a$ . A partir de ellos se calcula su módulo cortante como:

$$G_a = \frac{E_a}{2(1 + \nu_a)}, \quad (5.11)$$

que es la relación isotrópica estándar. El valor de  $G_a$  resulta de vital importancia, pues controla la rigidez al cortante del adhesivo.

- Rigideces cohesivas equivalentes:  
Se obtienen las pendientes lineales de una ley cohesiva elástica en modo II y modo I:

$$k_t = \frac{G_a}{h_a}, \quad k_n = \frac{E_a}{h_a}. \quad (5.12)$$

- $k_t$  (MPa/mm) es la rigidez tangencial: definida como la relación entre  $\tau$  y la separación tangencial dada
- $k_n$  (MPa/mm) es la rigidez normal: cuánto peel  $\sigma$  genera una apertura normal dada.

Estas rigideces aparecen de forma natural al entender el adhesivo como una distribución de muelles de espesor  $h_a$ .

- Energía crítica en modo I a partir de  $\sigma_c$ :  
Si se adopta una ley cohesiva lineal elástica-frágil, el área bajo la curva tracción-separación hasta la rotura normal es:

$$G_{Ic} = \int_0^{\delta_c} \sigma d\delta = \frac{1}{2} \sigma_c \delta_c = \frac{\sigma_c^2}{2k_n}, \quad (5.13)$$

- Geometría de la unión y carga de trabajo:  
Se fija la longitud de solape  $l$  y una carga  $F$  para evaluar las expresiones cerradas  $\tau(x)$  y  $\sigma(x)$ . En esta fase aún no se grafican; solo se deja todo preparado para que las funciones analíticas puedan calcular tensiones en cualquier  $x$  del solape.

3. A continuación, se va a analizar el **bloque de Resultados**, en el que se concretan las soluciones analíticas para una carga dada, evalúa las tensiones en los puntos más relevantes del solape (extremos) y valida por integración que las resultantes de borde recuperadas coinciden con las expresiones teóricas, lo que proporciona una base analítica sólida para la posterior comparación con resultados numéricos.

En primer lugar, se evalúan las tensiones en  $x=\pm l/2$ . Estos valores son críticos porque en los extremos del solape suelen concentrarse las máximas  $\sigma$  y  $\tau$ , asociadas a la iniciación del despegue del adhesivo.

En la práctica,  $\tau(x)$  en el borde coincide para Goland y Chen (independencia de  $k'$ ) mientras que  $\sigma(x)$  en el borde difiere levemente entre Goland y Chen (por la distinta elección de  $k'$ ).

En segundo lugar, se lleva a cabo la validación de las resultantes de borde a partir del campo de tensiones.

El objetivo de esta parte es comprobar por equilibrio que el campo analítico de tensiones implementado ( $\tau(x)$  y  $\sigma(x)$ ) reproduce las resultantes (fuerza cortante y momento) que deben existir en los bordes del solape. Es decir, verificar que del propio campo de tensiones se obtienen los valores de referencia:

$$M_0 = \frac{kFh}{2}, \quad V_0 = \frac{k'2Fh}{l}. \quad (5.14)$$

donde:

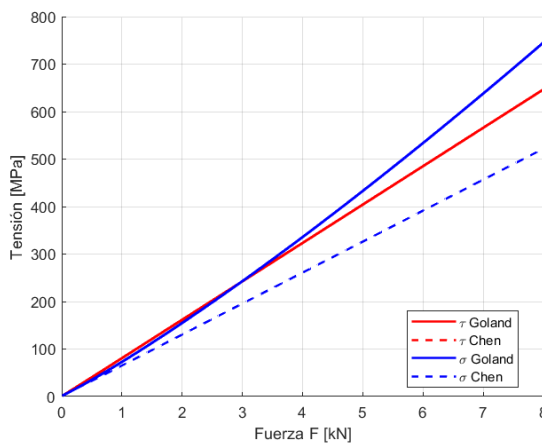
- $V_0$ : cortante de borde por unidad de ancho (N/mm).
- $M_0$ : momento de borde por unidad de ancho (N).

Para llegar a las expresiones que se acaban de mencionar, la tensión normal interfacial  $\sigma(x)$  actúa como “carga distribuida” que genera cortante y, a su vez, momento al integrar a lo largo del solape.

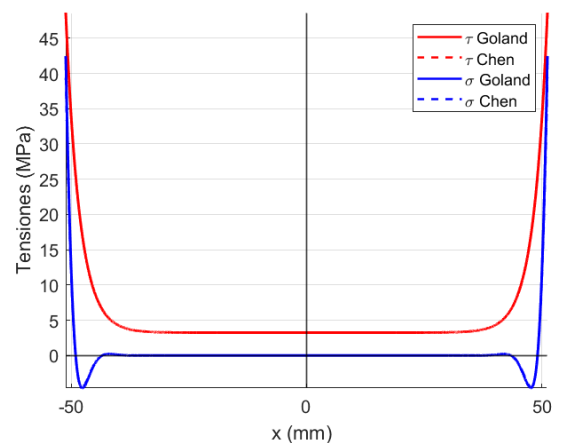
$$V(x) = \int_{x_0}^x \sigma(s) ds, \quad M(x) = \int_{x_0}^x V(s) ds, \quad (5.15)$$

donde  $x_0$  es uno de los bordes de integración ( $x_0=-l/2$ ) y se evalúan en  $x=l/2$  para obtener  $V$  y  $M_0$ . Al integrar de forma definida se evitan las constantes de integración.

Para finalizar, se van a comentar las dos graficas complementarias que se obtienen de dicho código analítico:



**Figura 5.1** Tensiones-Fuerza.



**Figura 5.2** Distribución de Tensiones en el Solape.

La primera estudia la evolución de las tensiones en el borde del solape ( $x=\pm l/2$ ) al aumentar la carga  $F$ . En ella se representan la tensión cortante  $\tau$  y la tensión normal  $\sigma$  para las dos variantes del modelo (Goland–Reissner y la corrección de Chen). Dado que  $\tau(x)$  no depende del factor de cortante de borde  $k'$ , la curva de cortante en el borde coincide en ambos casos; por el contrario,  $\sigma(x)$  sí incorpora  $k'$  y, por tanto, muestra ligeras diferencias entre Goland y Chen, siendo esta última generalmente más conservadora en el sentido de suavizar el pico de peel.

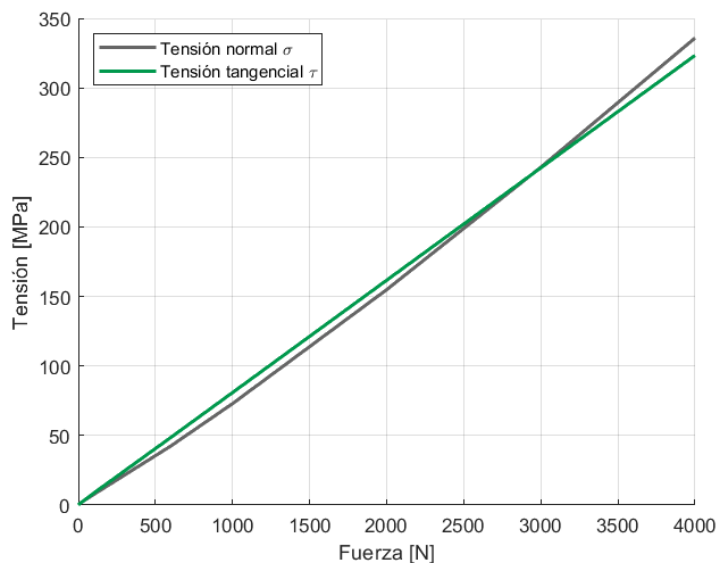
La respuesta frente a  $F$  no es estrictamente lineal, puesto que en la implementación el factor de momento de borde  $k$  depende de la rigidez relativa y de la propia carga.

La segunda figura muestra la distribución de tensiones a lo largo del solape para una carga fija  $F$ , es decir,  $\tau(x)$  y  $\sigma(x)$  en  $x \in [-1/2, 1/2]$ . La cortante  $\tau(x)$  presenta máximos cerca de los extremos y disminuye hacia el interior con una longitud característica  $\lambda_\tau$ , por lo que su forma es idéntica en Goland y Chen. La normal  $\sigma(x)$ , de estructura hiperbólico-trigonométrica, concentra picos en los bordes y puede cambiar de signo en el interior, estando gobernada por  $\lambda_\sigma$ ; aquí se aprecia la sensibilidad al  $k'$  adoptado: la corrección de Chen reduce la intensidad del pico de borde frente a la predicción clásica de Goland-Reissner.

En conjunto, la primera figura cuantifica cómo crecen las tensiones en la sección más crítica al incrementar la carga, mientras que la segunda describe la transferencia de carga y la penalización por flexión a lo largo del solape, proporcionando una base analítica sólida para la comparación con resultados numéricos y para la interpretación física del comportamiento de la unión SLJ.

## 5.2 Resultados Analíticos

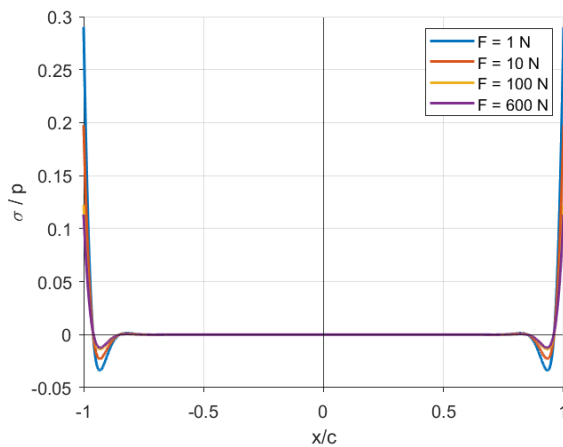
### 5.2.1 Tensiones frente al aumento de la Carga Aplicada



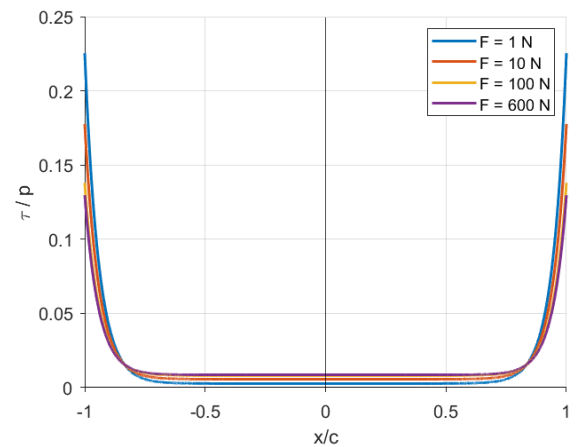
**Figura 5.3** Tensiones en Wolfram Mathematica.

En la Figura 5.3 se representan las tensiones máximas obtenidas mediante el modelo analítico implementado en el código de Wolfram Mathematica, diferenciando la componente normal y la tangencial. Ambas crecen con la carga aplicada, pero en este caso se observa que la componente normal presenta una ligera no linealidad en su evolución, efecto directamente asociado a la formulación de Goland y Reissner, la cual introduce correcciones geométricas en la distribución de tensiones normales en uniones adhesivas. Por su parte, la componente tangencial mantiene un comportamiento lineal con la fuerza. Estos resultados reflejan las particularidades del modelo teórico empleado y servirán posteriormente para su contraste con las simulaciones numéricas.

## 5.2.2 Tensiones a lo largo del solape para distintas Cargas Aplicadas



**Figura 5.4** Distribución de Tensiones Normales  $\sigma$  a lo largo del solape.



**Figura 5.5** Distribución de Tensiones Tangenciales  $\tau$  a lo largo del solape.

En las Figuras 5.4 y 5.5 se muestran las distribuciones adimensionalizadas de las tensiones normales  $\sigma/p$  y tangenciales  $\tau/p$  obtenidas mediante la formulación de Goland y Reissner para distintos valores de la carga aplicada. Se observa que ambas tensiones alcanzan máximos localizados en los extremos del solape ( $x/c = \pm 1$ ) y valores prácticamente nulos en la zona central, reflejando el carácter concentrado de los esfuerzos en uniones adhesivas. Estas curvas resultan perfectamente simétricas respecto al centro del solape, ya que la expresión analítica proporciona valores idénticos en ambos extremos, aunque en la práctica esta simetría no se cumple de forma estricta debido a condiciones de contorno no simétricas.

## 6 Comparación de Resultados Numéricos-Analíticos

---

En este apartado se lleva a cabo una comparación entre los resultados obtenidos mediante las formulaciones analíticas de Goland y Reissner y los obtenidos numéricamente a través de simulaciones con el software de elementos finitos Abaqus. El objetivo de este análisis comparativo es evaluar la capacidad predictiva de los modelos analíticos frente a la solución numérica, prestando especial atención a las tensiones normales y tangenciales en los extremos del solape.

De este modo, se pretende identificar el grado de concordancia entre ambas aproximaciones, teniendo en cuenta que se trata de metodologías de naturaleza muy distinta. Por un lado, los modelos analíticos se apoyan en hipótesis simplificadas que permiten obtener expresiones cerradas, pero que inevitablemente limitan su rango de validez. Por otro, la solución numérica, obtenida mediante el método de elementos finitos e implementada a través de una subrutina UINTER, introduce la modelación de la interfase mediante una ley de muelles. Este planteamiento permite representar con mayor detalle la geometría y las condiciones de contorno, pero también incorpora un margen de error derivado de la propia formulación adoptada para la interfase, ya que la ley de muelles supone una idealización del comportamiento real del adhesivo. En consecuencia, ambos enfoques presentan fortalezas y limitaciones propias, lo que justifica la necesidad de un análisis comparativo.

## 6.1 Solape Largo

### 6.1.1 Tensiones Máximas frente al aumento de Carga Aplicada

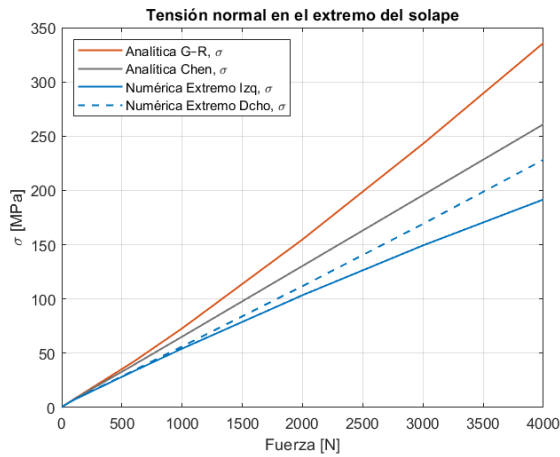


Figura 6.1 Comparación Tensiones Normales.

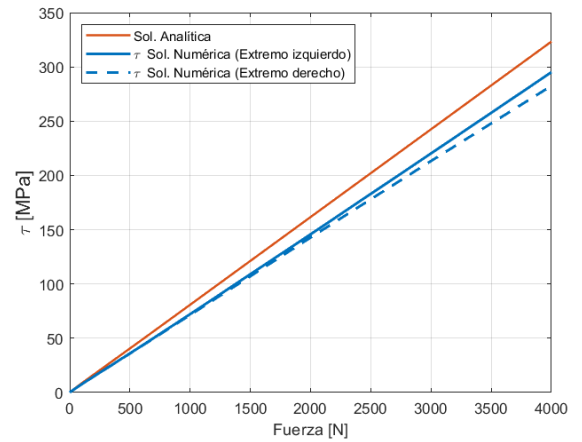


Figura 6.2 Comparación Tensiones Tangenciales.

La primera comparación se establece entre las tensiones máximas en los extremos del solape y el incremento de la carga aplicada, considerando tanto la solución analítica como la numérica. Los resultados muestran una buena concordancia para cargas bajas (aproximadamente hasta 500 N), a partir de las cuales las curvas comienzan a diverger. En el caso de las tensiones normales, el comportamiento no lineal reflejado por el modelo analítico no se reproduce plenamente en la solución numérica, lo que explica la creciente separación entre ambas predicciones conforme aumenta la carga. Además, se aprecia que los valores obtenidos en los dos extremos del solape no coinciden: en el extremo izquierdo las tensiones presentan cierta no linealidad, aunque con una tendencia distinta a la analítica, mientras que en el derecho mantienen un crecimiento lineal. Por el contrario, las tensiones tangenciales presentan una correspondencia notablemente mejor entre los dos enfoques, manteniendo una evolución casi coincidente en el rango de estudio. Además, se observa una diferencia cualitativa relevante: mientras que en el modelo analítico las tensiones normales alcanzan valores superiores a las tangenciales, en el modelo numérico sucede lo contrario, lo que constituye una de las principales discrepancias de esta comparación.

6.1.2 Tensiones Normales a lo largo del solape para distintas cargas aplicadas

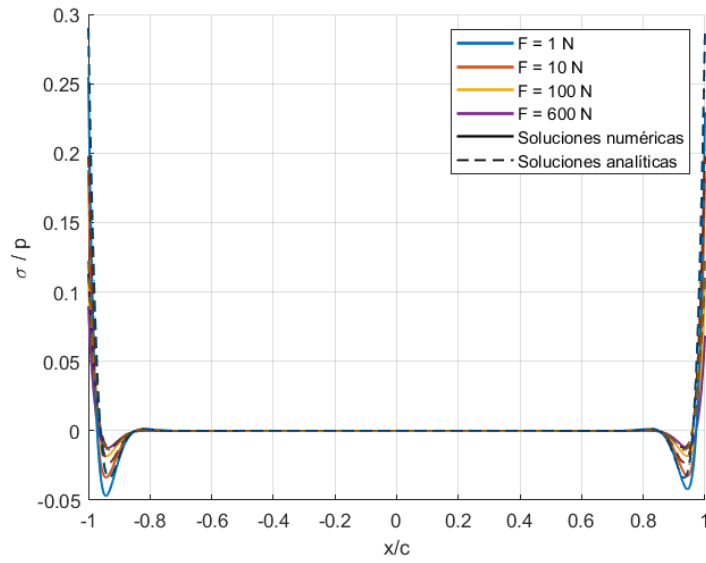


Figura 6.3 Superposición Distribución de Tensiones Normales.

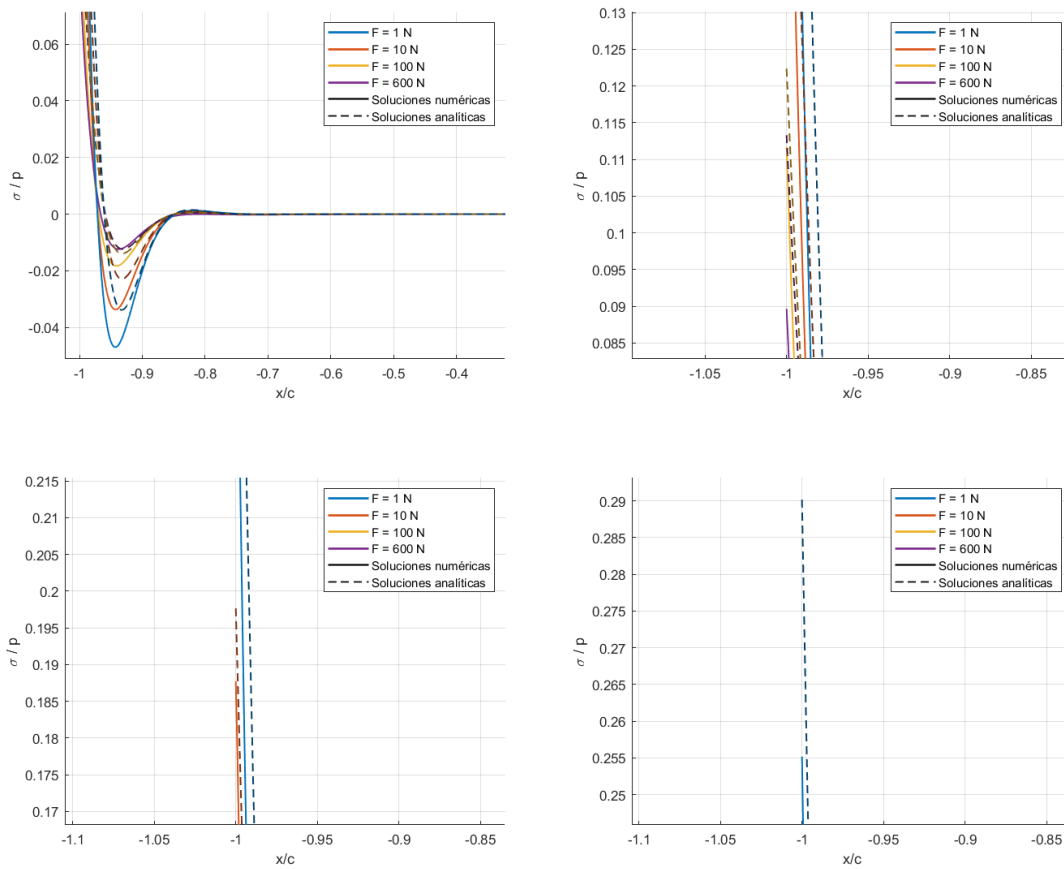
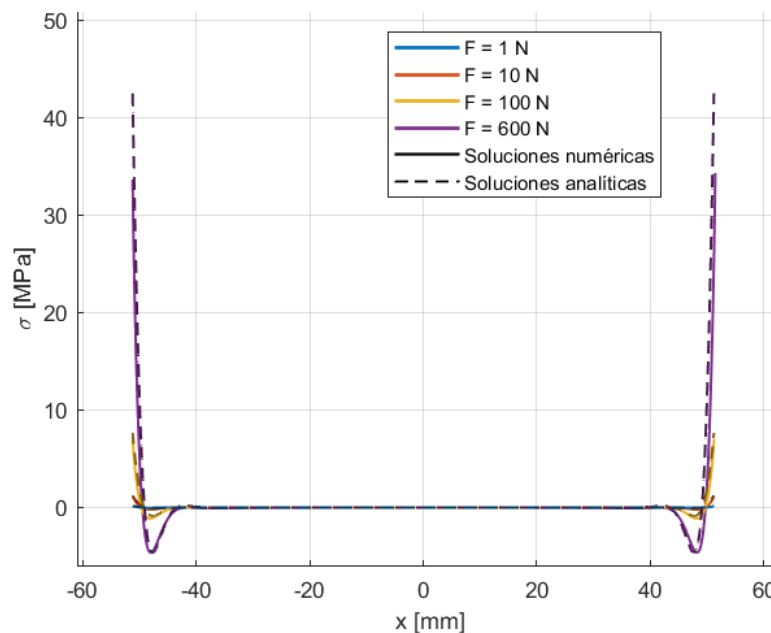


Figura 6.4 Comparación Tensiones normales Zoom.

En este caso se comparan las distribuciones de tensiones normales a lo largo del solape para diferentes valores de la carga. Se observa, en primer lugar, que la solución analítica presenta un comportamiento simétrico respecto al centro del solape, mientras que la solución numérica no reproduce esta simetría de forma exacta. Asimismo, el cambio de signo de las tensiones en la zona próxima a los extremos, que en el modelo numérico se manifiesta mediante un pico más pronunciado, no aparece con la misma intensidad en los resultados analíticos. Por otro lado, tal y como ya se había evidenciado en el análisis de las tensiones máximas, los valores de pico obtenidos analíticamente resultan superiores a los alcanzados en el modelo numérico. En conjunto, puede afirmarse que, aunque la solución numérica reproduce adecuadamente la forma general de la distribución de tensiones normales y capta las zonas críticas de concentración en los bordes del solape, las discrepancias detectadas ponen de manifiesto la mayor sensibilidad de esta componente a las hipótesis de modelado y a la idealización de la interfase mediante la ley de muelles.

Con el objetivo de respaldar una de las conclusiones más importantes de este trabajo —que el modelo LEBIM implementado ofrece un mejor comportamiento a cargas bajas— se presentan los resultados dimensionales de las tensiones normales 6.5. Estos muestran que, en términos absolutos, la correspondencia con la solución analítica es más precisa en ese rango de cargas. Al representar los resultados de forma adimensional, las diferencias parecen trasladarse hacia las cargas pequeñas. Esto ocurre porque en la zona central del solape las tensiones sí crecen de manera proporcional con la carga, pero en los bordes ese crecimiento no sigue exactamente la misma proporcionalidad. Al dividir por la magnitud de referencia  $p = F/t$ , estas desviaciones de los extremos se amplifican en el régimen de cargas reducidas. Como consecuencia, la adimensionalización aumenta las discrepancias en este rango, aunque en escala dimensional se observa con claridad que el modelo es más preciso a cargas bajas.



**Figura 6.5** Superposición Distribución de Tensiones Normales dimensional.

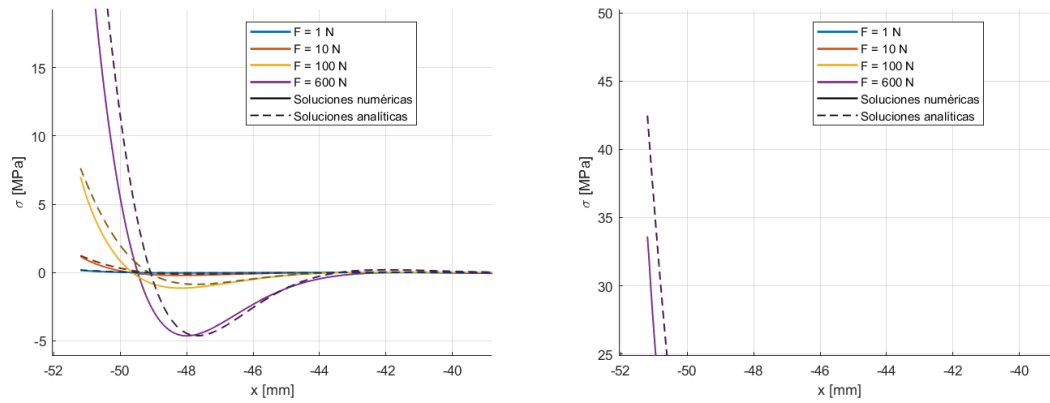


Figura 6.6 Comparación Tensiones Normales Zoom.

### 6.1.3 Tensiones Tangenciales a lo largo del solape para distintas cargas aplicadas

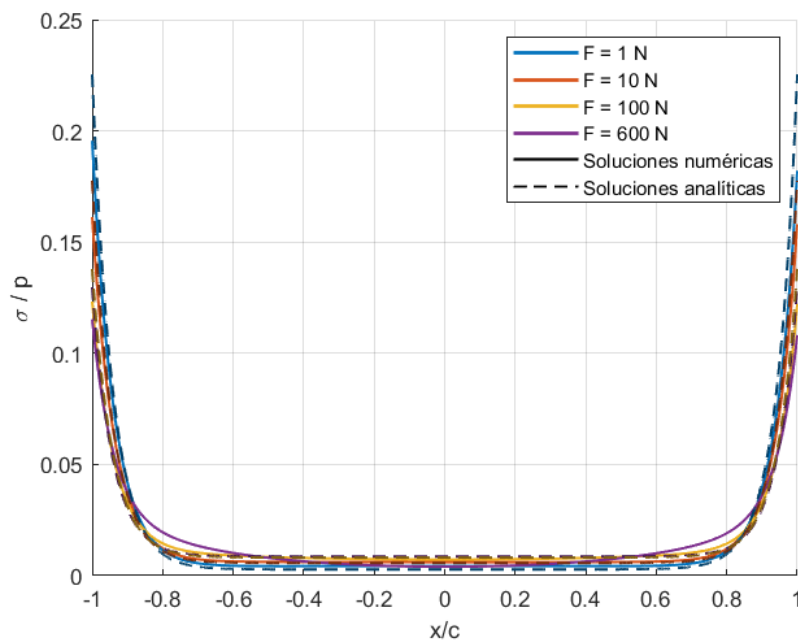
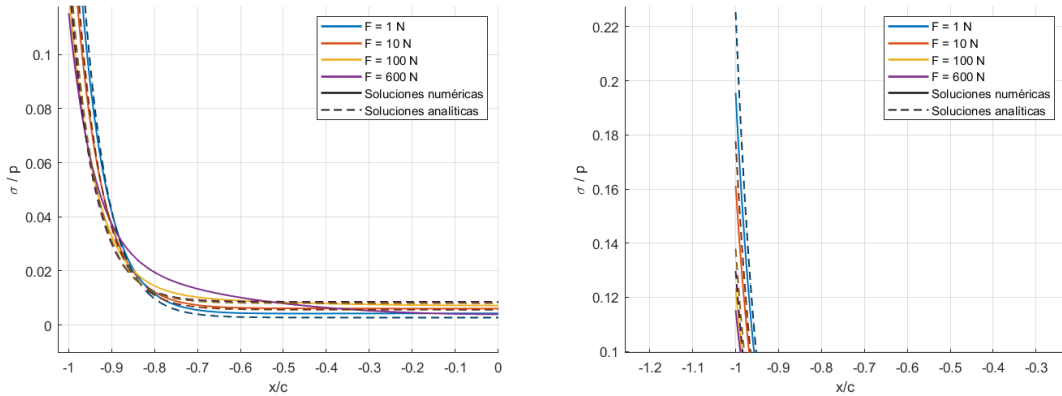


Figura 6.7 Superposición Distribución de Tensiones Tangenciales.



**Figura 6.8** Comparación Tensiones Tangenciales Zoom.

En este apartado se analizan las tensiones tangenciales obtenidas a lo largo del solape para distintos niveles de carga. A diferencia de lo observado en las tensiones normales, la correspondencia entre las soluciones analíticas y numéricas resulta mucho más estrecha. Ambas aproximaciones reproducen con gran similitud la forma de la distribución, manteniendo el carácter simétrico respecto al centro del solape y mostrando valores de pico próximos en los extremos.

Las principales diferencias se localizan en la zona de borde, donde los picos calculados mediante la formulación analítica tienden a ser ligeramente superiores a los numéricos, especialmente para cargas elevadas. Sin embargo, estas discrepancias son reducidas en comparación con las observadas en las tensiones normales, lo que confirma que el modelo numérico implementado a través de la subrutina UINTER representa de manera más fiel el comportamiento tangencial del adhesivo.

En conjunto, puede afirmarse que la comparación de las tensiones tangenciales evidencia un alto grado de concordancia entre ambos enfoques, reforzando la validez de la solución numérica para describir este tipo de respuesta.

De manera análoga al caso anterior, la comparación de las tensiones tangenciales se incluye para reforzar la misma conclusión: a cargas pequeñas la precisión del modelo es superior. 6.9

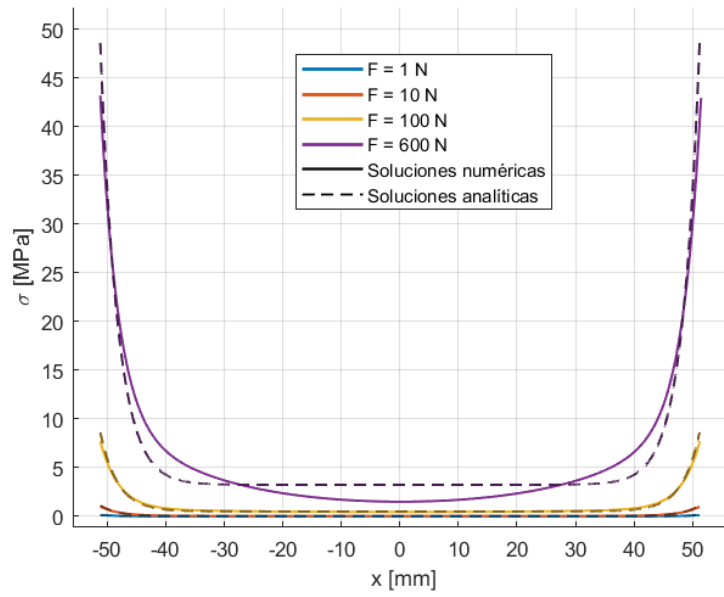


Figura 6.9 Superposición Distribución de Tensiones Tangenciales dimensional.

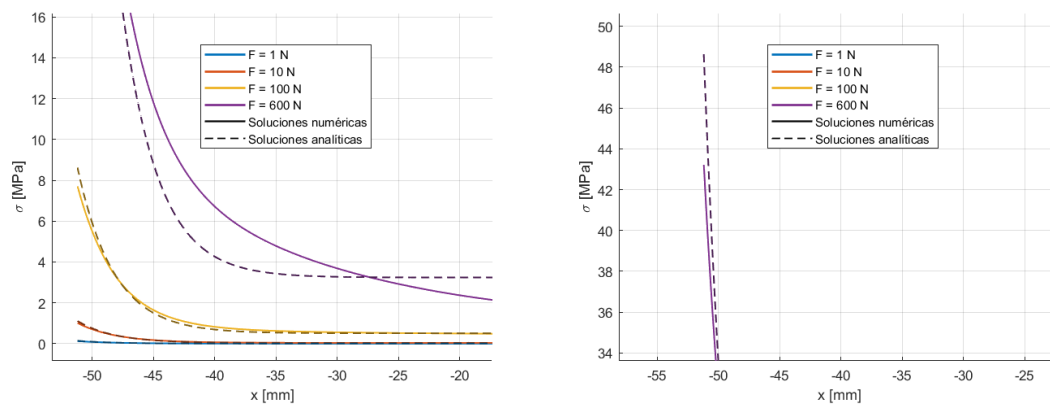


Figura 6.10 Comparación Tensiones Tangenciales Zoom.

## 6.2 Estudio Adicional: Solape Corto

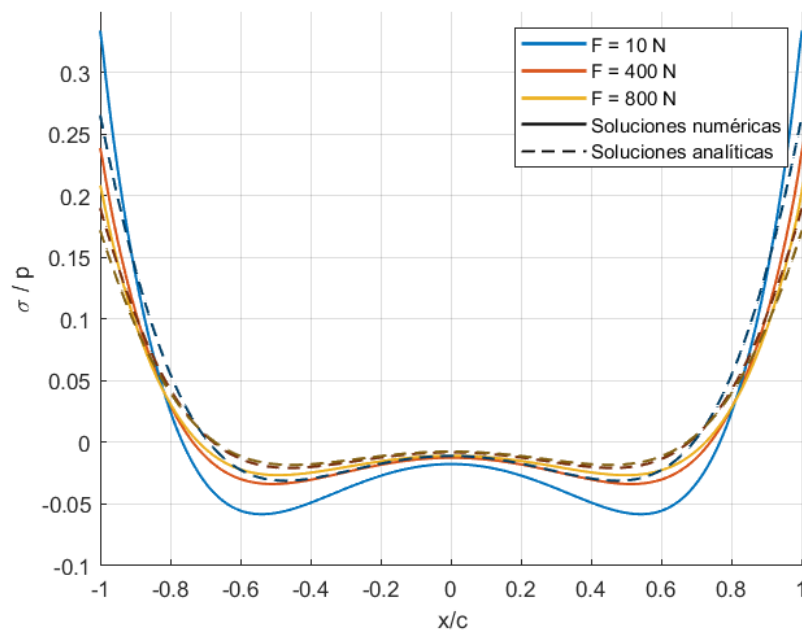
Con objeto de comprobar que la capacidad predictiva del modelo implementado (LEBIM + UINTER en Abaqus) no depende de la relación de aspecto del solape, se contrasta ahora el solape corto frente a la solución analítica clásica de Goland & Reissner (1944). El objetivo es verificar que las tendencias reproducidas previamente en el solape largo se mantienen cuando el solape es corto. De este modo, la ampliación aquí presentada contribuye a corroborar que la obtención de resultados fiables y consistentes es una característica de la metodología propuesta, y no un efecto particular de un caso geométrico concreto.

Los parámetros geométricos que caracterizan el solape corto en cuestión, son los siguientes:

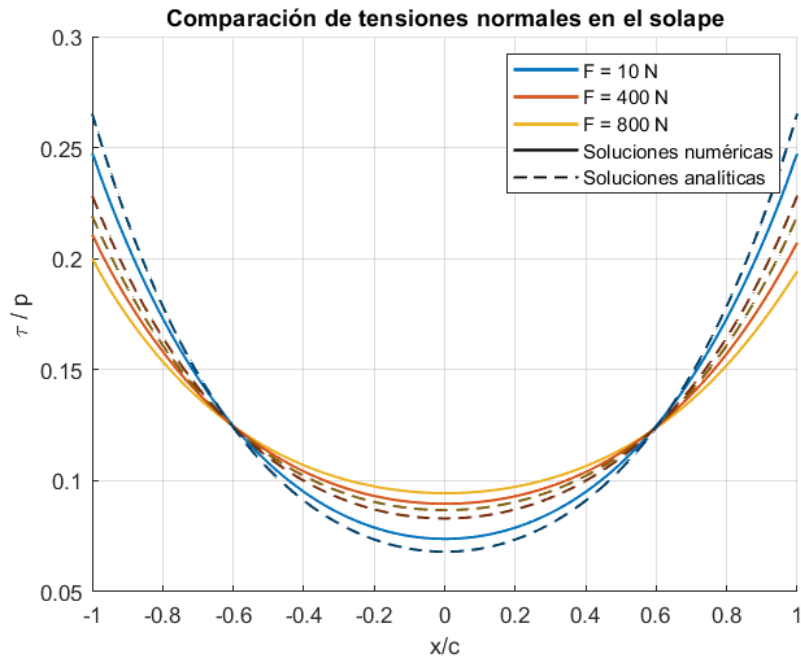
**Tabla 6.1** Parámetros geométricos de la unión adhesiva 4.3.

$l$ [mm]	$c$ [mm]	$t$ [mm]	$\eta$ [mm]	$\alpha_n$ [rad]
64	6.4	1.6	0.1248	0.011363147

En el estudio adicional realizado para el solape corto (Figs. 6.11 y 6.12) se observa el mismo comportamiento ya descrito en apartados anteriores: el modelo reproduce adecuadamente la evolución de las tensiones normales, con un buen ajuste en el interior y ligeras diferencias en los extremos, mientras que en las tensiones tangenciales la concordancia con la solución analítica vuelve a ser prácticamente exacta en todo el rango. Estos resultados confirman que las conclusiones obtenidas previamente para el solape largo se mantienen también en el solape corto, evidenciando que la validez y precisión del modelo no dependen de la longitud relativa del solape.



**Figura 6.11** Superposición Distribución de Tensiones Normales.



**Figura 6.12** Superposición Distribución de Tensiones Tangenciales.



# 7 Comparación de Resultados Numéricos-Numéricos Tsai

Con el objetivo de contrastar la validez de la metodología numérica desarrollada, se procede a comparar los resultados obtenidos en Abaqus mediante la subrutina UINTER con las soluciones numéricas presentadas por Tsai (1994) [22]. Se selecciona para empezar, el caso de uniones con solape largo y adhesivo flexible, de modo que las condiciones geométricas y materiales correspondan a un escenario directamente comparable.

## 7.1 Solape Largo

### 7.1.1 Comparación Distribución de Tensiones Normales a lo largo del solape

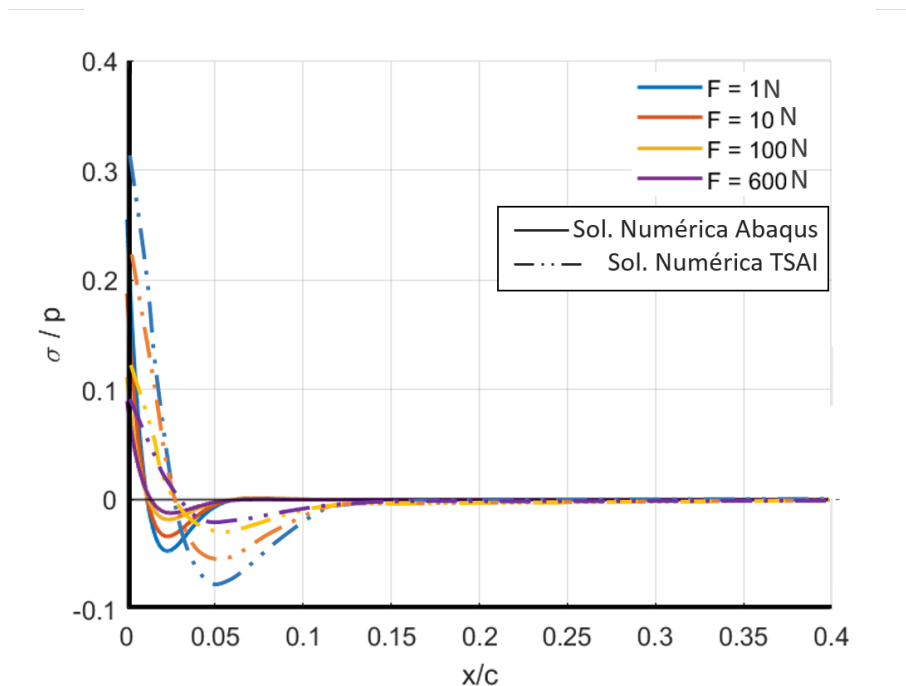
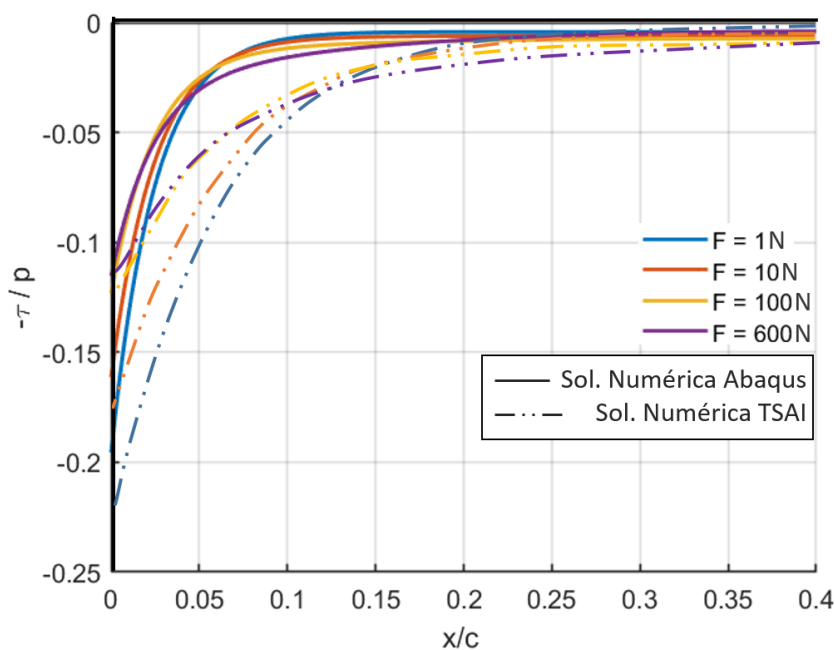


Figura 7.1 Superposición Tensiones Normales.

En la primera comparación, relativa a la distribución de tensiones normales adimensionalizadas a lo largo del solape, se aprecia un acuerdo cualitativo entre ambas soluciones, ya que ambas reproducen la localización de los máximos en los extremos y la rápida relajación hacia valores cercanos a cero en el interior de la unión. Sin embargo, se identifican diferencias relevantes: en primer lugar, las curvas de Tsai muestran un descenso más pronunciado en la zona próxima al borde, alcanzando valores negativos más acusados, mientras que las soluciones de Abaqus tienden a suavizar esta transición. Asimismo, las tensiones máximas predichas por Tsai resultan sistemáticamente mayores que las calculadas en Abaqus.

En conjunto, la comparación refleja que, si bien ambas aproximaciones capturan las tendencias principales de la distribución, las soluciones de Abaqus subestiman los máximos y presentan una transición más suave en la zona de cambio de signo de las normales.

### 7.1.2 Comparación Distribución de Tensiones Tangenciales a lo largo del solape

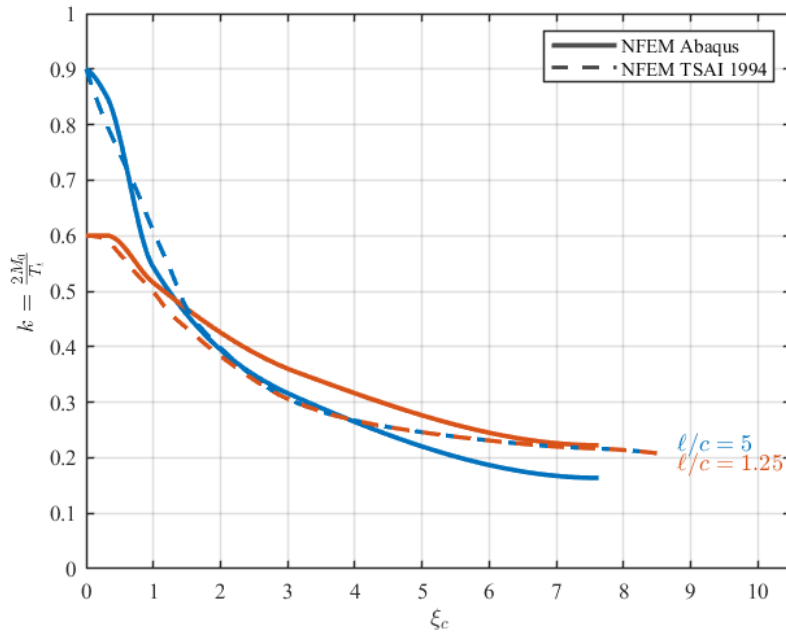


**Figura 7.2** Superposición Tensiones Tangenciales.

En la comparación de las tensiones tangenciales a lo largo del solape entre los resultados obtenidos en Abaqus y los de Tsai se aprecia, en general, una buena concordancia. Ambas soluciones reproducen la concentración de tensiones en los extremos y su rápida relajación hacia valores próximos a cero en el interior, manteniendo además el carácter simétrico de la distribución.

Las diferencias más notables aparecen en las proximidades del borde, donde las soluciones de Tsai presentan valores de pico algo superiores a los de Abaqus.

En conjunto, puede afirmarse que las discrepancias son reducidas y que el modelo implementado en Abaqus representa con gran fidelidad el comportamiento tangencial del adhesivo en comparación con los resultados numéricos de Tsai.

7.1.3 Curvas  $k$  vs  $\xi_c$ 

**Figura 7.3** Curva  $k$  vs  $\xi_c$ .

La comparación de las curvas  $k(\xi_c)$  obtenidas en Abaqus con las reportadas por Tsai muestra una buena concordancia general en la tendencia, especialmente para valores moderados y altos de  $\xi_c$ . En este rango, ambas soluciones reflejan la pérdida progresiva de influencia de la longitud libre del adherente y la convergencia hacia un comportamiento gobernado principalmente por el parámetro adimensional  $\xi_c$ .

Ambas formulaciones capturan la misma física: cuando  $\xi_c$  es pequeño, una viga más larga incrementa el momento en el borde y, por tanto, el valor de  $k$ ; a medida que  $\xi_c$  crece, este efecto queda compensado y las curvas tienden a coincidir. Por ello, puede concluirse que, pese a diferencias puntuales, la solución numérica implementada en Abaqus reproduce de manera satisfactoria las predicciones de Tsai en términos de la evolución de  $k$  frente a  $\xi_c$ .

## 7.2 Estudio Adicional: Solape Corto

El objetivo es comprobar si, al igual que en el caso del solape largo, los resultados obtenidos presentan una buena analogía con los datos numéricos publicados por Tsai (1994). [6.1]

En el solape corto se observa un comportamiento análogo al del solape largo: en las tensiones normales ambos modelos reproducen la localización de los máximos en los extremos y su relajación hacia el interior, aunque con discrepancias en las proximidades del borde, donde las soluciones de Tsai presentan descensos más acusados mientras que Abaqus suaviza la transición; por el contrario, en las tensiones tangenciales la coincidencia es prácticamente exacta en todo el rango, incluso con mayor precisión que en el solape largo. En conjunto, estos resultados refuerzan la validez del modelo numérico, demostrando que su fiabilidad se mantiene frente a diferentes configuraciones geométricas.

### 7.2.1 Comparación Distribución de Tensiones Normales a lo largo del solape

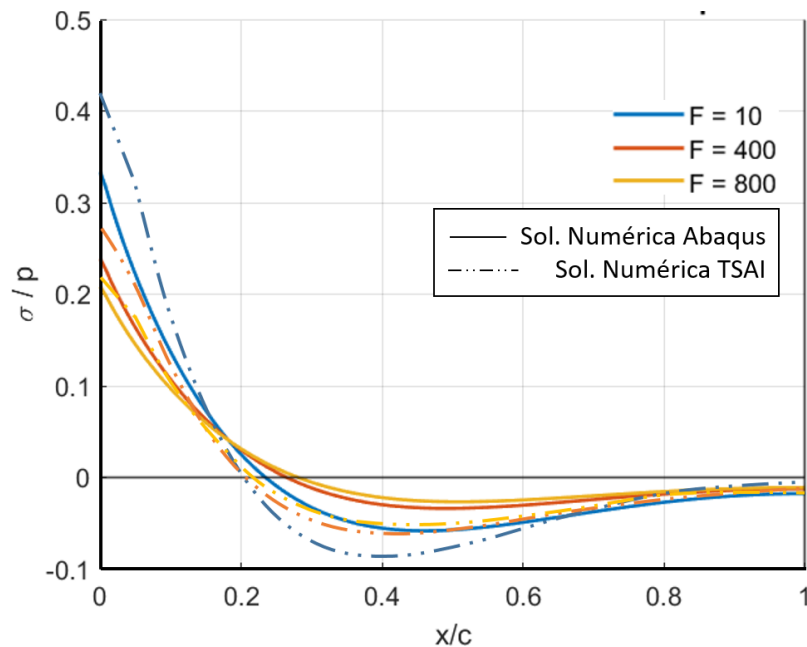


Figura 7.4 Superposición Tensiones Normales.

## 7.2.2 Comparación Distribución de Tensiones Tangenciales a lo largo del solape

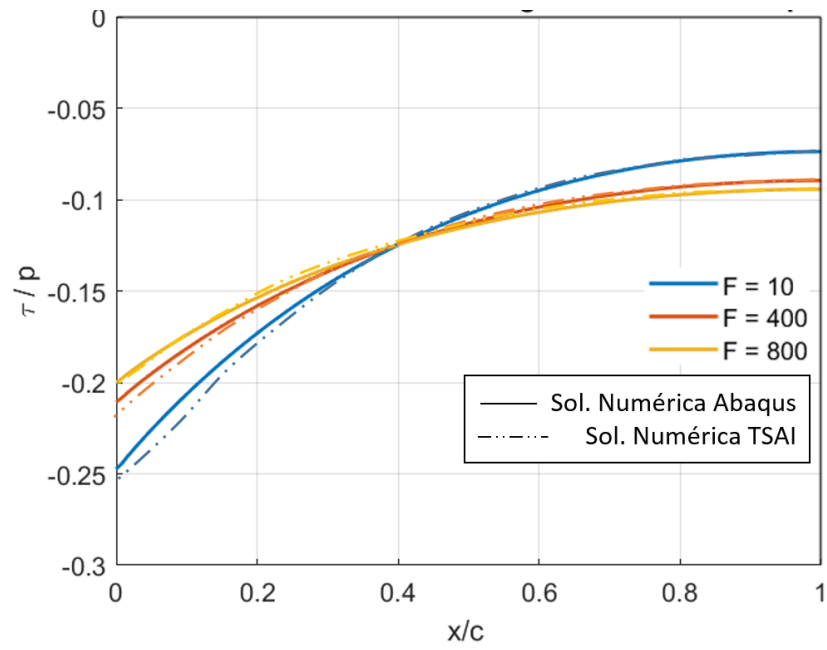


Figura 7.5 Superposición Tensiones Tangenciales.



# 8 Comparación de Resultados Numéricos de referencia - Analíticos

Con el objetivo de reforzar la validez de las comparaciones realizadas a lo largo del trabajo, se incluye a continuación un estudio adicional en el que se confrontan los resultados numéricos presentados por Tsai y Morton (1994) con las soluciones analíticas derivadas del modelo clásico de Goland y Reissner (1944). Esta comparación permite verificar la coherencia entre ambas referencias, puesto que los resultados de Tsai, obtenidos mediante simulaciones por elementos finitos, deberían reproducir adecuadamente las tendencias y distribuciones teóricas predichas por el modelo analítico. De este modo, se corrobora que las discrepancias observadas entre las simulaciones numéricas desarrolladas en este trabajo y las referencias citadas no son atribuibles a inconsistencias en las fuentes empleadas, sino a diferencias inherentes a los enfoques de modelado empleados.

## 8.1 Solape Largo

### 8.1.1 Comparación Distribución de Tensiones Normales a lo largo del solape

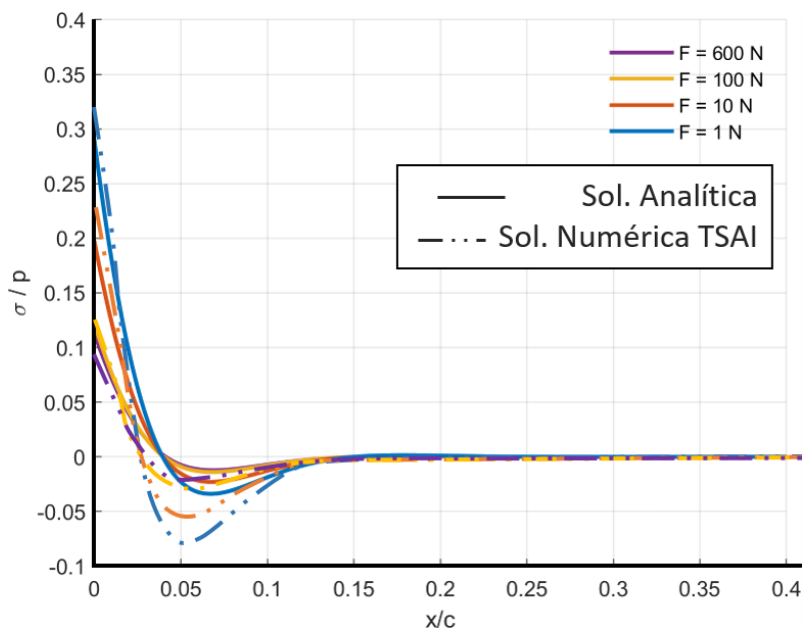


Figura 8.1 Superposición Tensiones Normales.

## 8.1.2 Comparación Distribución de Tensiones Tangenciales a lo largo del solape

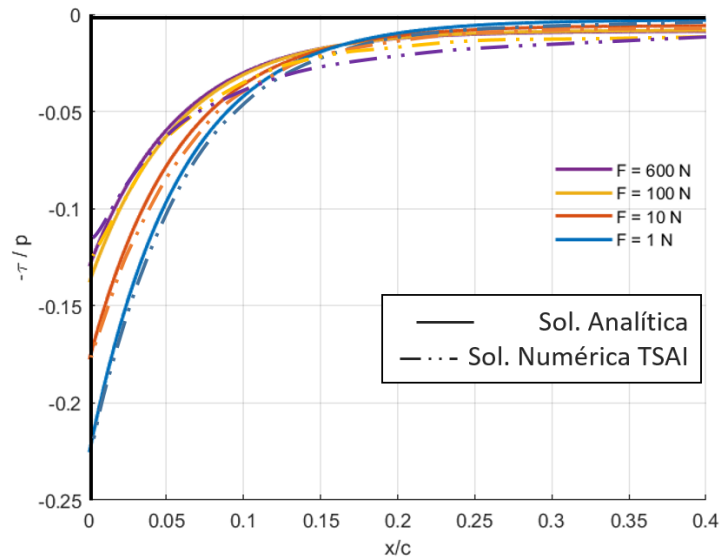


Figura 8.2 Superposición Tensiones Normales.

Los resultados representados en las Figuras 8.1 y 8.2 muestran una notable coherencia entre las soluciones analíticas de Goland y Reissner y las soluciones numéricas de Tsai y Morton (1994). En conjunto, la concordancia entre ambos modelos resulta claramente superior a la obtenida en las comparaciones individuales con el modelo numérico desarrollado en este trabajo, lo que refuerza la consistencia de las referencias empleadas.

En el caso de las tensiones tangenciales, la coincidencia entre las curvas es prácticamente exacta a lo largo de toda la longitud del solape, lo que indica que ambos enfoques describen con gran precisión la transferencia de esfuerzos cortantes en la interfase adhesiva. Por otro lado, las tensiones normales presentan una correspondencia también satisfactoria: los valores máximos alcanzados en los bordes del solape se encuentran muy próximos entre ambas soluciones, mostrando una estimación más ajustada que la obtenida con los resultados numéricos propios. La principal discrepancia aparece en la región central del solape, donde el cambio de signo de la solución analítica resulta menos acusado. En este tramo, el modelo de Goland y Reissner predice valores de compresión significativamente menores, mientras que las simulaciones de Tsai muestran una respuesta más asimétrica y con tensiones negativas más pronunciadas. A pesar de ello, la coincidencia en la zona próxima al borde—donde se concentran las máximas tensiones y, por tanto, la región de mayor interés estructural—es excelente, lo que demuestra la validez del modelo analítico como referencia teórica frente a los resultados numéricos de Tsai.

# 9 Conclusiones

---

El presente Trabajo Fin de Grado ha abordado el estudio de uniones adhesivas del tipo *Single Lap Joint* (SLJ) mediante un enfoque combinado: por un lado, modelos analíticos clásicos como los de Goland & Reissner implementados a través de un código en Wolfram Mathematica; y por otro, simulaciones numéricas con Abaqus/Standard, complementadas con una subrutina UINTER que modela la interfase adhesiva mediante una ley de muelles elásticos inspirada en el modelo LEBIM. Los principales resultados y conclusiones obtenidos son los siguientes:

## 1. Resultados numéricos y Estudio de convergencia

- El estudio de convergencia de malla confirmó la independencia de la solución respecto a la discretización, seleccionando como óptima la Malla 3 (elemento de 0.05 mm), que representó un equilibrio entre precisión y coste computacional.
- Las simulaciones reprodujeron adecuadamente la distribución de tensiones, con máximos en los extremos y relajación hacia el interior, identificando estas zonas como críticas para la nucleación del fallo.
- Para cargas elevadas se detectó una ligera pérdida de proporcionalidad en los extremos, atribuida a efectos de no linealidad geométrica y a la presencia de singularidades locales.

## 2. Resultados analíticos

- Los modelos analíticos ofrecen expresiones basadas en hipótesis simplificadas (simetría perfecta, linealidad, adherentes rígidos o semirrígidos, etc.) que restringen su rango de validez.
- Las tensiones normales presentaron un comportamiento no lineal en función de la carga, mientras que las tangenciales se mantuvieron lineales.
- Las distribuciones fueron perfectamente simétricas, con máximos en los extremos del solape.

## 3. Comparación analítico–numérico

- El modelo numérico mostró una excelente concordancia en las tensiones tangenciales, reproduciendo fielmente tanto la forma como la magnitud de la distribución.
- En las tensiones normales aparecieron discrepancias, más acusadas a partir de 500 N, ya que Abaqus suaviza la transición en los bordes y subestima los valores máximos.

- Se observó que la correspondencia es más precisa en el régimen de cargas bajas (hasta aproximadamente 500 N), mientras que para cargas elevadas las diferencias se intensifican.
- Al representar los resultados en forma adimensional, se detectó un efecto particular: las desviaciones parecen concentrarse en cargas pequeñas, aunque en realidad el modelo es más preciso en este régimen. Esto se debe a que, mientras en el centro del solape las tensiones escalan proporcionalmente con la carga, en los bordes el crecimiento no es estrictamente proporcional; al dividir por la magnitud de referencia  $p = F/t$ , esas desviaciones se magnifican de forma artificial para cargas reducidas.
- Una diferencia cualitativa destacable es que, mientras que los modelos analíticos predicen tensiones normales superiores a las tangenciales, el modelo numérico mostró la tendencia contraria.

#### **4. Comparación con Tsai (1994)**

- Las tensiones normales presentaron en ambos casos máximos en los extremos, si bien las curvas de Tsai mostraron picos más pronunciados y transiciones más abruptas que las suavizadas en Abaqus.
- Las tensiones tangenciales mostraron una excelente concordancia, reproduciendo tanto la forma de la distribución como la magnitud de los valores de pico.
- Las curvas  $k-\xi_c$  confirmaron el mismo comportamiento físico: mayor influencia de la longitud libre para bajos valores de  $\xi_c$ , y convergencia hacia un régimen gobernado únicamente por este parámetro para valores altos.

#### **5. Naturaleza y limitaciones de los métodos**

- Los métodos analíticos son rápidos y aportan visión física, pero se apoyan en hipótesis simplificadas que limitan su aplicabilidad.
- Los métodos numéricos permiten representar geometrías y condiciones de contorno complejas, aunque dependen de la discretización, del coste computacional y están condicionados por la aparición de singularidades en los bordes.
- La subrutina UINTER, aunque eficaz para introducir el comportamiento de la interfase, supone una idealización que puede llevar a subestimar las tensiones normales y suavizar los gradientes de borde.

#### **6. Conclusión global**

- La metodología desarrollada en este trabajo valida la capacidad de los modelos numéricos para reproducir tanto soluciones analíticas clásicas como resultados de referencia en la literatura, particularmente en el régimen de cargas aplicadas bajas.
- Se confirma la idoneidad del enfoque UINTER para describir con fiabilidad la respuesta en cortante, mientras que en apertura se identifican márgenes de mejora.
- Este estudio sienta una base sólida para futuros trabajos orientados a introducir modelos de daño más avanzados, capaces de capturar con mayor realismo la iniciación y propagación del fallo en uniones adhesivas.

## 10 Posibles Mejoras y Próximos Pasos

---

El trabajo desarrollado abre la puerta a múltiples líneas de mejora y evolución que permitirían enriquecer el análisis realizado y extender la aplicabilidad del modelo. Estas perspectivas se pueden agrupar en dos bloques: las posibles mejoras sobre el planteamiento actual y los próximos pasos que marcan la continuidad natural de la investigación.

En cuanto a las **posibles mejoras**, una primera línea de avance se encuentra en el refinamiento del modelo de daño. Actualmente, la subrutina UINTER implementa un enfoque de interfase lineal elástica-frágil (LEBIM) que caracteriza el fallo de forma binaria (intacto o completamente dañado). Evolucionar hacia un modelo de daño progresivo permitiría representar la degradación gradual de la rigidez adhesiva, aportando una visión más realista de la transición hacia la fractura.

También se ha identificado que la idealización de la interfase mediante la ley de muelles propia del modelo LEBIM introduce cierta rigidez adicional, lo que se traduce en distribuciones de tensión suavizadas y en una subestimación de los valores máximos, especialmente en el modo normal. Asimismo, las comparaciones han puesto de manifiesto que la nitidez de los picos observados en los modelos analíticos no se reproducen con la misma intensidad en la solución numérica, y que aparece una discrepancia cualitativa en la jerarquía entre tensiones normales y tangenciales. No obstante, estas limitaciones derivan de la propia formulación del modelo LEBIM y, dado que este constituye el marco elegido para el presente trabajo, se asumen como parte inherente del planteamiento numérico desarrollado.

En cuanto a los **próximos pasos**, el eje central es la aplicación completa del análisis de daño con la subrutina UINTER, pasando del régimen puramente elástico a la simulación explícita de la fractura de la interfase. La implementación actual ya contempla la activación del daño mediante la combinación de un criterio tensional y un criterio energético, garantizando además la irreversibilidad del proceso. El siguiente objetivo es, por tanto, explotar plenamente estas capacidades para analizar la iniciación y la propagación de la grieta.

Un paso complementario será la profundización en el uso del Principio de Mínima Energía Total sujeto a una Condición de Tensión (PMTE-SC). Este enfoque variacional permite caracterizar distintos escenarios de evolución del daño (iniciación estable, crecimiento inestable o localizaciones puntuales) y constituye una herramienta esencial para enriquecer el tratamiento del fallo en la interfase.

En síntesis, la continuidad de este trabajo pasa por aplicar de forma plena las capacidades de la subrutina UINTER para la simulación de la fractura, al mismo tiempo que se refina el modelo. De este modo, se establecerá un marco más completo y realista para el análisis del comportamiento de uniones adhesivas en aplicaciones estructurales.



# Anexo A

## Subrutina UINTER

---

### A.1 Código Principal

En este anexo se incluye el código completo de la subrutina UINTER desarrollada e implementada en este trabajo. A diferencia del cuerpo principal de la memoria, donde se han presentado únicamente fragmentos relevantes para facilitar su explicación, aquí se recopila la subrutina íntegra en lenguaje Fortran, tal y como ha sido utilizada en las simulaciones numéricas realizadas.

#### Código A.1 UINTERLEBIMAMA.

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C                                                                    C
C      SUBROUTINE LEBIM with AMA                                     C
C      Authors:   Mar Munoz Reja                                    C
C                                                                    C
C      University Seville, Spain, Agoust 2024                       C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

      subroutine uinter(stress,ddsddr,amki,amski,flux,ddfddt,ddsddt,
1      ddfddr,statev,sed,sfd,spd,svd,scd,pnewdt,rdisp,drdisp,
2      temp,dtemp,predef,dpred,time,dtime,freqr,ciname,slname,
3      msname,props,coords,aLocalDir,drot,area,chrLngth,node,ndir,
4      nstatv,npred,nprops,mcrd,kstep,kinc,kit,linper,lOpenClose,
5      lState,lSdi,lPrint)
C
C      include 'aba_param.inc'
C
      dimension stress(ndir),ddsddr(ndir,ndir),flux(2),ddfddt(2,2),
$      ddsddt(ndir,2),ddfddr(2,ndir),statev(nstatv),rdisp(ndir),
$      drdisp(ndir),temp(2),dtemp(2),predef(2,npred),dpred(2,npred),
$      time(2),props(nprops),coords(mcrd),aLocalDir(mcrd,mcrd),
$      drot(2,2),amki(ndir,ndir),amski(ndir,ndir)
      character*80 ciname,slname,msname
      parameter(toler = 1.D-12, zero=0.d0, one=1.d0, two=2.d0,
$      half = one/two)
C
```

```

INTEGER ND,PT,ELEM
REAL*8 factor
INTEGER error_ap,error_lec

real*8 DDS(ndir,ndir), psig,lambda,GIcb, Cets, Lets, Le
real*8 sigmacb,Pi,Gi,Gii,Gtot,ktkn,Gc,psiGcrit, mu,GcE
real*8 xnue,ebulk3,eg2,elam,trval,Gs,Gn,Gt,Knn,Ktt,Kss,K33
real*8 GiE,GiiE,KnnE,KttE,signoN
integer k1,k2,k,j,i,ndi,nshr,ntens,nprops,node
integer layer,kspt,kstep,kinc,nstatv,damage
real*8 sse,spd,scd,rpl,drpldt,dtime,temp,dtemp,celent,pnewdt
character*200 fullname

!      write(*,*) ddsddr, node, kstep,kinc,kit,statev(1)
      dds =0.d0
      psig=0.d0
      stress=0.d0
      Cets = 0.d0
      Lets = 0.d0

c      Definición de variables
c      READ THE MATERIAL PROPERTIES FROM THE INPUT FILE

Nini=PROPS(1)
      sigmact=PROPS(2)
      GIct=PROPS(3)
      lambdaHS=PROPS(4)
      ktkn=PROPS(5)
      Le=PROPS(6)
      mu=PROPS(7)

c      Definición de parámetros mecánicos de la interfase para el CCFFM

      KnnInter=Le*(sigmact**2)/(2*GIct)
      KttInter=KnnInter*ktkn

c      Definición de Pi e inicialización variables que comeienzan en cero

      Pi=ACOS(-1d0)
      GiT=0.0d0
      GiiT=0.0d0
      GiE=0.0d0
      GiiE=0.0d0

c      Inicializamos todas las variables:
c      Si estamos en k=1 y j=1, el damage y el damagemenosK debe ser cero
c      Si estamos en k=cualquiera y j=1, el damage por CT, por CT y resto
c      de variables deben ser cero
c      pero tanto el dagno como el damagemenosK deben mantenerse del k
c      anterior, por eso la tomamos de statev(1)

```

```

c   Para el resto de casos:
c   damagemenosK debe ser NO reversible, por eso lo debemos guardar de
c   un paso k a otro
c   Se actualiza al principio del AMA (j=1) para un paso k cualquiera,
c   pero en el resto de pasos j no cambia
c   solo pasa de un paso j a otro mediante la statev(13)
c   Y el damageT debe permanecer cte dentro de cada j, por eso se toma
c   desde statev(11) que no cambia
c   pero damageE si se actualiza en cada j, y se hace a traves de
c   statev(11) que se decide al final de la UMAT
C   Por eso se empieza a calcular con el damageE de la iteracion
c   anterior, j-1

      IF ((kinc*kstep).eq.1)THEN
        damage=0.00d0
        damagemenosK=0.00d0
      ELSEIF ((kinc*kstep).eq.kstep)THEN
        damagemenosK=statev(1)
        damage=statev(1)
        damageT=0.00d0
        damageE=0.00d0
        dds=0.0d0
        psig=0.0
      ELSE
        damagemenosK=statev(13)
        damage=statev(1) !siempre sera cero, desde k=1 y j=1 hasta que
c         cambie
        damageT=statev(11) !siempre sera cero, desde k=1 y j=1 hasta que
c         cambie
        damageE=statev(12) !siempre sera cero, desde k=1 y j=1 hasta que
c         cambie
      ENDIF

c   Para quitar basura, si las deformaciones que me da ABAQUS son
c   proximas a cero, se hacen 0

!   DO k=1,4
!   if ((abs(STRAN(k)).le.1d-18)) STRAN(k)=0.0d0
!   if ((abs(DSTRAN(k)).le.1d-18)) DSTRAN(k)=0.0d0
!   ENDDO

c   CALCULO DE LA MATRIZ TANGENTE Y DE LAS TENSIONES
c   La UINTER es llamada, como minimo, 2 veces en cada paso j. Esto es
c   j.1 y j.2
c   algunas veces se llama mas veces si no encuentra convergencia
c   en j.1, j.2,..., j.n, STRAN(j)= STRAN(j-1)+ DSTRAN(j-1), siempre,
c   es decir
c   la deformacion que convergio en la ultima j
c   Sin embargo, en j.1, DSTRAN(j)=0, y en j.2,..., j.n, DSTRAN(j) se
c   actualiza hasta el subpaso n.

```

```

c   por eso todos estos calculos se deben hacer con STRAN(j)+DSTRAN(j).

c   Es decir, la deformacion del j anterior (j-1) y el incremento de
deformacion de este paso j
c   En cada subpaso de j lo unico que cambia es DSTRAN
c   Funcion dagno para normales dependiendo del signo del strain
c   signoN es el signo de la deformacion normal.
c   -1.0 para strain de compresion, 1.0 para strain traccion o cero

      signoN=SIGN(1.d0,(-RDISP(1)))
      if (signoN.le.0.00d0) then
        funN=1.0d0
      else
        funN=1.0d0-damage
      end if
      funT=1.0d0-damage

c   Rigideces del resorte

      Knn=KnnInter*funN
      Ktt=KttInter*funT

c   Actualizacion de la matriz de elasticidad
c   Esta matriz es la misma dentro de cada j, es decir en j.1. Al
principio del AMA, cuando ABAQUS
c   todavia no ha calculado nada.
c   El dagno realmente es decidido al final de cada j (j.n). Es decir,
este dagno depende del dagno
c   que converge en j-1
c   Hay que notar que el dagno, como el resto de variables de estado
NO cambia dentro de cada j

      DDS(1,1)=Knn
      DDS(2,2)=Ktt

c   Incremento del tensor de tension. Es una variable nuestra
c   La misma explicación que para la matriz de rigidez, pero esta si
cambia porque depende de DSTRAN
c   que cambia en cada subpaso j.n
c   sigma_nn:

      STRESS(1)=DDS(1,1)*(RDISP(1))

c   sigma_tt:

      STRESS(2)=DDS(2,2)*(RDISP(2))

c Determinacion de la matriz TANGENTE

```

```

c   DDS es nuestra variable y DDSDDDE de ABAQUS

DO i=1,2
  DO j=1,2
    DDSDDR(i,j)=DDS(i,j)
  ENDDO
ENDDO

c   CALCULO DE nuestras variables del PMTE para todos los PI de las
interfases
c   Cálculo de energía del Criterio Tensional

GiT=(STRESS(1))**2.d0/(2.d0*KnnInter)
GiiT=(STRESS(2))**2.d0/(2.d0*KttInter)

c   Cálculo de energía del Criterio energético en comparación con la
UINTER aquí el RDISP es desplazamiento relativo al final de a
iteración

GiE=KnnInter*((RDISP(1))**2.d0)/(2.d0)
GiiE=KttInter*((RDISP(2))**2.d0)/(2.d0)

c   calculo de la energia critica en la primera iteracion para el CT y
el CE

if (kinc.eq.1) then

c   en la UINTER el desplazamiento de despegue es negativo y contacto
positivo

  psig=datan2(STRESS(2)*dsqrt(1/ktkn),-STRESS(1))
  Gct=(GIct)*(1.d0+(dtan(psig*(1.d0-lambdaHS))**2.d0)
psiGcrit=pi/(2.d0*(1.d0-lambdaHS))
IF(abs(psig).ge.psiGcrit) Gct=GIct*1.d8
GcE=Gct*mu

c   calculo de energia total en la primera iteracion para el CT y ese
debe ser el mismo en tomo el AMA

  IF (signoN.GT.0.DO)THEN
    GtotT=GiT+GiiT
  ELSE
    GtotT=GiiT
  ENDIF
else

c   si NO es la primera iteracion se debe tomar las energias criticas
y

```

```

c   la energia total de CT (sustituye al vector tension) de las
c   variables de estado
c   porque es igual que tomarlo de la primera ITR.
c   Tened en cuenta que tanto la Gct como GcE deben ser tomadas de la
c   primera ITR
c   aunque al final del la UMAT, si el PI NO esta dagnado statev(7)=
c   GcE sera 0 para que no
c   sume a la energia disipada cuando abramos el odb en el script de
c   python

        psig=statev(3)
        Gct=statev(5)
        GcE=Gct*mu
        GtotT=statev(4)
endif

c   calculo de energia total para cualquier iteracion para el CE con
c   el dagno decidido al final de la ITR anterior

IF (signoN.GT.0.D0)THEN
        GtotE=GiE+GiiE
ELSE
        GtotE=GiiE
ENDIF

c   CALCULO DEL DAGNO DEL CT, CE y DEFINITIVO
c   aunque hayamos calculados todas las variables en cada PI, para
c   el calculo del CT y CE unicamente se debe contar con los PI NO
c   dagnados en los pasos anteriores
c   por eso solo nos metemos en el bucle si damagemenosK=0
c   IF (damagemenosK.le.1d-18) THEN !cumple irreversibilidad
c   En el primer j, al final de la UMAT, se evalua el CT
c   Y en el damageE, unicamente se decide los difernetes inicios
c   dependiendo del CT

if (kinc.eq.1) then !si estamos al final en el primer incremento
        if (GtotT.ge.GcT) then !cumple CT
                damageT=1.d0 !entonces el PI esta dagando por CT
                if (abs(Nini-2.d0).le.1d-18) damageE=1.d0 !inicio todo
                dagnado del CT
                if (abs(Nini-1.d0).le.1d-18) damageE=0.d0 !inicio nada
                dagnado del CE

c

                write(*,*)Nini, abs(Nini-2.d0)

                end if !ya se termina el CT y se fija para el resto de pasos
                j con la statev(11)

```

```

c   al final de cualquier j diferente de 1, se evalua el damageE
    porque CT ya esta evaluado

    else
      if (GtotE.ge.GcE) then
        damageE=1.d0
      else
        damageE=0.d0
      end if
    end if !salimos de la evaluacion de damageT y del damageE

c   Despues de hacer el CE se debe combinar con el CT

if ((abs(damageT).le.1d-18).or.(abs(damageE).le.1d-18)) then
  damage=0.d0
else
  damage=1.0
end if

    ENDIF !el final del bucle de damagemenosK. Garantiza la
        irreversibilidad

C   fuera del bucle que garantiza la irreversibilidad preparamos la
    energia y energia citica por PI
c   para calcular despues el funcional de energia en cada N. Para
    todos los PI de las interfases
c   esten dagnados o no. Notar que algun PI dagnado puede cambiar de
    traccion a compresion en algun k
c   por eso debe hacerse fuera del bucle anterior
C   ver apuntes de goodnote

    IF (damage.le.1d-18) THEN
      GcE=0.d0 !se hace cero para que no sume en el funcional de
        energia
      GtotE=GiE+GiiE
    ELSEIF (damagemenosK.GT.1d-5) THEN !si no rompe en este paso solo
      suma energia a compresion
      GcE=0.d0 !se hace cero para que no sume en el funcional de
        energia
      GtotE=GiE*((1.d0-signoN)/2.d0) !solo se sumaria energia si esta
        a compresion porque ya esta roto del paso anterior
    ELSE !si rompe en este paso suma energia a compresion y energia
      disipada
      GtotE=GiE*((1.d0-signoN)/2.d0)
    ENDIF

c   Salida de datos. Todos los datos han de ser utilizado con
    anterioridad
    statev(1)=damage
    statev(2)=node

```

```
statev(3)=psig
statev(4)=GtotT
statev(5)=Gct
statev(6)=GtotE
statev(7)=GcE
statev(8)=GiE
statev(9)=GiiE
statev(10)=signoN
statev(11)=damageT
statev(12)=damageE
statev(13)=damagemenosK
statev(14)=-STRESS(1)
statev(15)=-STRESS(2)

RETURN
END
```

## A.2 Ejecución del Código Principal

---

### Código A.2 Ejecución en Python.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Sep 16 11:41:51 2021

@author: marmu
"""

from os import chdir, path, mkdir, getcwd, remove
from shutil import rmtree, move
from glob import glob
from subprocess import call

name_files='Job-'
name_INP=name_files+'.inp'
name_UINTER='UINTERLEBIMAMA'

actual_directory = getcwd()
chdir(actual_directory)

def borrar_archivos(list_delete):
    for files in list_delete:
        files_delete = glob(files)
        for k in range(len(files_delete)):
            remove(files_delete[k])
```

```
list_delete = (name_files+'.sta', name_files+'.dat', name_files+'.sim',
              name_files+'.prt', name_files+'.msg', name_files+'.com', name_files
              +'.log', name_files+'.jnl',\
              name_files+'.mtx',name_files+'.pes',name_files+'.par',
              name_files+'.pmg',name_files+'.odb')
borrar_archivos(list_delete)

call('abaqus Job=' + name_files + ' ' + 'input=' + name_INP + ' ' + '
     user=' + name_UINTER,shell=True)
```



# Anexo B

## Estudio en Wolfram

### Código B.1 CAMPO DE TENSIONES RISSO CON TENSIONES NORMALES Goland-Reissner.

```
SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL
\[Tau] en la interfase dependiente de x y de la longitud l del solape (
  expresión 49 del artículo de Goland-Reissner pero con otra
  nomenclatura)
tau[x_] =
  F / (4 b l) (((1 + 3 k) l / (2 ltau) Cosh[x/ltau] / Sinh[l / (2 ltau)]) +
    3 (1 - k));

ltau = Sqrt[(E12 h ha) / (8 Ga)]; k = 1 / (
  1 + 2 Sqrt[2]
  Tanh[
    l / (2 h) Sqrt[(3 (1 - nu^2) F) / (2 E12 h)]]]; kprimaCHEN = (
  h (1 - k) + ha) / (2 h); kprimaGOLAND =
  k l Sqrt[(3 (1 - nu^2) F) / (4 E12 h^3)];

sigma[x_] = (2 F h) / (
  b R lsigma) ((k / 2 R1 / lsigma +
    kprima / l Sinh[l / (2 lsigma)] Sin[l / (2 lsigma)]) Sinh[x /
    lsigma] Sin[x / lsigma] + (2 F h) / (
  b R lsigma) ((k / 2 R2 / lsigma +
    kprima / l Cosh[l / (2 lsigma)] Cos[l / (2 lsigma)]) Cosh[x /
    lsigma] Cos[x / lsigma]);

lsigma = Power[(E12 h^3 ha) / (6 Ea), (4)^-1]; R =
  1 / 2 (Sinh[l / lsigma] + Sin[l / lsigma]); R1 =
  Cosh[l / (2 lsigma)] Sin[l / (2 lsigma)] +
  Sinh[l / (2 lsigma)] Cos[l / (2 lsigma)]; R2 =
  Sinh[l / (2 lsigma)] Cos[l / (2 lsigma)] -
  Cosh[l / (2 lsigma)] Sin[l / (2 lsigma)];

PARÁMETROS PARA DIBUJAR
valores para adherentes (N y mm) de la tabla 5.2 de Risso que a su vez
están tomados de Da Silva. Redux326
```

```

PARÁMETROS REALES:
E12 = 70000; nu = 33/100; h =
  15/10; b = 1.

VALORES PARA ADHESIVOS (N y mm):
ha = 10/100; Ea = 2500; nua = 35/100; Ga = Ea/(2 (1 + nua));
kt = Ga/ha; kn = Ea/ha; l = 15; Funica =XXX;

(*Valores impuestos *)
sigmac = 50;(* Sigma crítica en MPa *)
(*mu=100; *)

GIc =( sigmac^2)/(2*kn);(* Cálculo de GIc *)

Print["GIc = ", N[GIc, 6], " MPa\[CenterDot]mm"];
Print["kt = ", N[kt, 6], " MPa/mm"];
Print["kn = ", N[kn, 6], " MPa/mm"];
Print["kt/kn = ", N[kt/kn, 6]];

LINEALIDAD
En esta sección se puede comprobar la no linealidad de la solución.
  Hemos tomado las tensiones en el extremo del solape para observarla.
  Parece que sólo tiene no linealidad la solución de Goland
kprima = kprimaGOLAND; tauGOLANDfuerza[x_, F_] = tau[x];
sigmaGOLANDfuerza[x_, F_] = sigma[x];

kprima = kprimaCHEN; tauCHENfuerza[x_, F_] = tau[x];
sigmaCHENfuerza[x_, F_] = sigma[x];

Plot[{tauGOLANDfuerza[-1.0*l/2, F*1000],
  tauCHENfuerza[-1.0*l/2, F*1000],
  sigmaGOLANDfuerza[-1.0*l/2, F*1000],
  sigmaCHENfuerza[-1.0*l/2, F*1000]}, {F, 0,15},
  PlotStyle -> {{Continue, Thick}, {Dashed, Thick}, {Continue,
    Thick}, {Dashed, Thick}}, Frame -> True,
  PlotRange -> Automatic,
  BaseStyle -> {FontSize -> 24}, AspectRatio -> .7,
  ImageSize -> Scaled[.5], FrameLabel -> {"F(KN)", "Tensiones (MPa)"},
  PlotLegends -> {"tauGOLAND", "tauCHEN", "sigmaGOLAND", "sigmaCHEN"}]

RESULTADOS
tauGOLAND[x_] = tauGOLANDfuerza[x, Funica];

sigmaGOLAND[x_] = sigmaGOLANDfuerza[x, Funica];

tauCHEN[x_] = tauCHENfuerza[x, Funica];

sigmaCHEN[x_] = sigmaCHENfuerza[x, Funica];

```

Comprobación del momento y el cortante en los extremos para las dos propuestas, Chen y Goland

En esta sección se comprueba como influye las diferentes kprima de los dos autores, por ejemplo en los extremos del solape

```
sigmaGOLAND[1.0*1/2]
```

```
tauGOLAND[1.0*1/2]
```

```
sigmaCHEN[1.0*1/2]
```

```
tauCHEN[1.0*1/2]
```

Comprobación del momento y el cortante en los extremos

En esta sección se comprueba la formulación de Goland donde decía que el  $\text{Subscript}[M, 0] = k (F h)/2$  y el  $\text{Subscript}[V, 0] = k_{\text{prima}} (2F h)/1$ . Debe coincidir con la integrales de las tensiones normales. SI vemos la tensión normal como una carga distribuida, sabemos que la integral de la carga distribuida es el cortante y la integral de este es el momento.

```
cortanteGOLAND[x_] = Integrate[b*sigmaGOLAND[x], x];
```

```
momentoGOLAND[x_] = Integrate[cortanteGOLAND[x], x];
```

```
cortanteCHEN[x_] = Integrate[b*sigmaCHEN[x], x];
```

```
momentoCHEN[x_] = Integrate[cortanteCHEN[x], x];
```

```
momentoEXTREMOS = k (F h)/2*1.0
```

```
momentoGOLAND[-1.0*1/2]
```

```
momentoCHEN[-1.0*1/2]
```

```
cortanteEXTREMOS = kprima (2 F h)/1*1.0
```

```
cortanteGOLAND[-1.0*1/2]
```

```
cortanteCHEN[-1.0*1/2]
```

GRÁFICAS

```
Plot[{tauGOLAND[x], tauCHEN[x], sigmaGOLAND[x],
```

```
sigmaCHEN[x]}, {x, -1/2, 1/2},
```

```
PlotStyle -> {{Continue, Thick}, {Dashed, Thick}, {Continue,
```

```
Thick}, {Dashed, Thick}}, Frame -> True,
```

```
PlotRange -> All,
```

```
BaseStyle -> {FontSize -> 24}, AspectRatio -> .7,
```

```
ImageSize -> Scaled[.5], FrameLabel -> {"x(mm)", "Tensiones (MPa)"},
```

```
PlotLegends -> {"tauGOLAND", "tauCHEN", "sigmaGOLAND", "sigmaCHEN"}]
```



# Índice de Figuras

1.1	Porcentaje de Materiales Compuestos presentes en el B787 [2]	2
1.2	Alerón de coche de carreras fabricado de Material Compuesto [17]	2
1.3	Aplicación de Materiales Compuestos en el ámbito de la edificación [3]	2
2.1	Clasificación de los Materiales Compuestos	6
2.2	Representación Fibras-Partículas [19]	6
2.3	a) Fibras continuas unidireccionales, b) Fibras cortas aleatorias, c) Tejido bidireccional, d) Laminado Multidireccional [20]	6
2.4	Tipos de Uniones Adhesivas [7]	11
2.5	Esquema genérico SLJ [21]	11
2.6	Diagramas de Equilibrios en una unión SLJ: a) Definiciones de la geometría, las propiedades del material y la trayectoria de carga excéntrica, b) Diagrama de cuerpo libre de una unión a solapa simple sometida a carga de tracción, c) Deflexiones laterales antisimétricas [14]	12
2.7	Remaches	13
2.8	Bulones	13
2.9	Tornillos	13
2.10	Modos de Fractura [12]	14
2.11	LEBIM [23]	17
2.12	Paralelepípedo sometido a: a) Tensión normal y b) Tensión Tangencial [16]	18
2.13	Relacion entre $\frac{k_t}{k_n}$ y $v_l$ [16]	18
2.14	Ley Constitutiva de la constitución de muelles. Interfase intacta: a) Modo I, b) Modo II. Interfase rota: c) Modo I y d) Modo II [23]	19
2.15	Representación de la Ley de Hutchinson-Suo [16]	21
2.16	Diagramas carga–desplazamiento predichos por el CCFFM en casos con fallo global tras el inicio de la grieta (a–b) y sin fallo global (c–d). Los ensayos a) y c) se controlaron en carga y los ensayos b) y d) en desplazamiento [10]	26
2.17	Leyes constitutivas del CCFFM+LEBIM en modo I y modo II, que relacionan resistencia, rigidez y energía crítica de la interfase [6]	27
2.18	CCFFM+LEBIM con PMTE-SC [6]	28
2.19	Escenarios predichos por el CCFFM+LEBIM con PMTE-SC representados en diagramas tipo $\Pi + R$ frente a $a$ [15]	28
3.1	Arquitectura del Sistema de Procesamiento de Datos	32
4.1	CC. Extremo Izquierdo	43
4.2	CC. Extremo Derecho	43
4.3	Representación del ángulo $\alpha_n$ que forma la Carga en el ensayo SLJ [22]	45

4.4	Descripción de la Malla 1	46
4.5	Descripción de la Malla 1	46
4.6	Descripción de la Malla 2	46
4.7	Descripción de la Malla 3	46
4.8	Descripción de la Malla 4	47
4.9	Descripción de la Malla 4	47
4.10	Descripción de la Malla 5	47
4.11	Convergencia de las Tensiones Normales $\sigma$	48
4.12	Convergencia de las Tensiones Tangenciales $\tau$	48
4.13	Error relativo de las Tensiones Normales $\sigma$	49
4.14	Error relativo de las Tensiones Tangenciales $\tau$	49
4.15	Error relativo de $\sigma$ frente a h	49
4.16	Error relativo de $\tau$ frente a h	49
4.17	Tensiones en ABAQUS	51
4.18	Distribución de Tensiones Normales $\sigma$ a lo largo del solape	52
4.19	Distribución de Tensiones Tangenciales $\tau$ a lo largo del solape	52
4.20	Curva k vs $\xi_c$ para solape largo y adhesivo flexible	53
4.21	Deflexión transversal en el solape para el caso de $l/c = 5$ con adhesivo flexible	54
5.1	Tensiones-Fuerza	58
5.2	Distribución de Tensiones en el Solape	58
5.3	Tensiones en Wolfram Mathematica	59
5.4	Distribución de Tensiones Normales $\sigma$ a lo largo del solape	60
5.5	Distribución de Tensiones Tangenciales $\tau$ a lo largo del solape	60
6.1	Comparación Tensiones Normales	62
6.2	Comparación Tensiones Tangenciales	62
6.3	Superposición Distribución de Tensiones Normales	63
6.4	Comparación Tensiones normales Zoom	63
6.5	Superposición Distribución de Tensiones Normales dimensional	64
6.6	Comparación Tensiones Normales Zoom	65
6.7	Superposición Distribución de Tensiones Tangenciales	65
6.8	Comparación Tensiones Tangenciales Zoom	66
6.9	Superposición Distribución de Tensiones Tangenciales dimensional	67
6.10	Comparación Tensiones Tangenciales Zoom	67
6.11	Superposición Distribución de Tensiones Normales	68
6.12	Superposición Distribución de Tensiones Tangenciales	69
7.1	Superposición Tensiones Normales	71
7.2	Superposición Tensiones Tangenciales	72
7.3	Curva k vs $\xi_c$	73
7.4	Superposición Tensiones Normales	74
7.5	Superposición Tensiones Tangenciales	75
8.1	Superposición Tensiones Normales	77
8.2	Superposición Tensiones Normales	78

# Índice de Tablas

---

2.1	Propiedades de las Fibras, Matrices y Metales [13]	9
3.1	Descripción de variables en la subrutina UINTER	33
3.2	Propiedades de la subrutina UINTER	33
3.3	Variables de estado (STATEV) de la subrutina UINTER	34
4.1	Propiedades del adherente 4.3	43
4.2	Propiedades del adhesivo 4.3	44
4.3	Propiedades críticas del adhesivo	44
4.4	Características del Step	44
4.5	Cargas aplicadas	44
4.6	Características de las Mallas	45
4.7	Parámetros geométricos de la unión adhesiva 4.3	51
6.1	Parámetros geométricos de la unión adhesiva 4.3	68



# Índice de Códigos

---

A.1	UINTERLEBIMAMA	83
A.2	Ejecución en Python	90
B.1	CAMPO DE TENSIONES RISSO CON TENSIONES NORMALES Goland-Reissner	93



# Bibliografía

---

- [1] Andrés Laguna Alcalde, *Prediction of crack onset and propagation in adhesive joints by means of the coupled criterion of the finite fracture mechanics*, Master's thesis, Universidad de Sevilla, 2020, pp. 23–26.
- [2] Appropedia Community, *Los materiales compuestos en la industria aeronáutica*, 2023, Accedido: 16 de septiembre de 2025.
- [3] Soletanche Bachy, *Nueva guía sobre las estructuras de materiales compuestos de la afgc – wiki sobre estos elementos estructurales poco utilizados en nuestra profesión*, 6 2022.
- [4] A. Barroso Caro, *Uniones aeronáuticas*, Presentaciones, Máster en Ingeniería Aeronáutica (MIA), Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, 2025.
- [5] José Cañas, Federico París, Juan Carlos Marín, Alberto Barroso, and Jesús Justo Estebaranz, *Mecánica de materiales compuestos*, Presentaciones de clase (Bloques 1 y 2), Máster en Ingeniería Aeronáutica (MIA), Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, 2025.
- [6] María del Mar Muñoz-Reja Moreno, *Analytical and numerical predictions by lelim and ffm for interface cracks in composites and their joints*, Phd thesis, Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Sevilla, Spain, 2021.
- [7] Przemysław Dobrzański and Witold Oleksiak, *Design and analysis methods for composite bonded joints*, **1** (2021), no. 262, 45–63.
- [8] F. Erdogan, *Fracture mechanics*, International Journal of Solids and Structures **37** (2000), 171–183.
- [9] José Antonio Santiago Espinal, *Análisis micromecánico de múltiples despegues de fibras en materiales compuestos usando el criterio acoplado de la mecánica de la fractura finita*, Trabajo fin de máster, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2020.
- [10] Israel García García, *Crack initiation in composites at micro and meso scales: Development and applications of finite fracture mechanics*, Ph.D. thesis, Doctoral dissertation; Advisor: Vladislav Mantič.
- [11] M. Goland and E. Reissner, *The stresses in cemented joints*, Journal of Applied Mechanics **11** (1944), no. 1, 17–27.

- [12] Fernando Suárez Guerra, *Estudio de la rotura en barras de acero. aspectos experimentales y numéricos*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, España, 2013.
- [13] Carl T. Herakovich, *Mechanics of fibrous composites*, John Wiley & Sons, Inc.
- [14] Gang Li and Pearl Lee-Sullivan, *Re-visiting the beam models for adhesively bonded single-lap joints part i: Comparison of bending moment predictions*, **82** (2006), no. 4, 367–395.
- [15] Vladislav Mantič, *Prediction of initiation and growth of cracks in composites. coupled stress and energy criterion of the finite fracture mechanics*, ECCM-16 European Conference on Composite Materials (Sevilla, España), 2014.
- [16] Luis Arístides Távara Mendoza, *Damage initiation and propagation in composite materials. boundary element analysis using weak interface and cohesive zone models*, Phd thesis, Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Sevilla, Spain, 2010.
- [17] Mitchel Narva, *Body kit o carenado / spoiler, lip o faldón: ¿qué son y para qué sirven?*, 6 2013.
- [18] Federico París Carballo, José Cañas Delgado, and Juan Carlos Marín Vallejo, *Introducción al análisis y diseño con materiales compuestos*, Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, 2006.
- [19] Przemysław D. Pastuszak and Aleksander Muc, *Application of composite materials in modern constructions*, **542** (2013), 119–129.
- [20] Basem E. Tawfik, Heba Leheta, Ahmed Elhewey, and Tarek Elsayed, *Weight reduction and strengthening of marine hatch covers by using composite materials*, (2016), 1–14.
- [21] Jelle ter Harmsel, *Relevant mechanical characterization methods of hybrid composites joints – a review*, Conference Paper, ResearchGate, November 2023, Accessed: 16 September 2025.
- [22] M. Y. Tsai and J. Morton, *An evaluation of analytical and numerical solutions to the single-lap joint*, **31** (1994), no. 18, 2537–2563.
- [23] Antonio López Vera, *Estudio numérico del daño en interfases de materiales compuestos a través de lebm y ccfm*, Trabajo fin de grado, Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Sevilla, España, 2021.