

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Programación y validación de un modelo DEA
centralizado de asignación de recursos basado en
maximización de ingresos

Autor: Juan Fernández Giraldo

Tutor: Sebastián Lozano Segura

Dpto. de Organización Industrial y Gestión de
Empresas I

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2025



Trabajo Fin de Grado
en Ingeniería de Organización Industrial

Programación y validación de un modelo DEA centralizado de asignación de recursos basado en maximización de ingresos

Autor:
Juan Fernández Giraldo

Tutor:
Sebastián Lozano Segura

Dpto. de Organización Industrial y Gestión de Empresas I
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2025

Trabajo Fin de Grado: Programación y validación de un modelo DEA centralizado de asignación de recursos basado en maximización de ingresos

Autor: Juan Fernández Giraldo

Tutor: Sebastián Lozano Segura

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2025

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo el desarrollo y validación de un modelo de análisis por envoltura de datos (DEA) centralizado enfocado en la asignación eficiente de recursos bajo un criterio de maximización de ingresos. La metodología DEA es ampliamente utilizada para evaluar la eficiencia relativa de un conjunto de unidades de toma de decisión (DMU), permitiendo la optimización de recursos y productos dentro de un sistema.

A diferencia de los modelos DEA tradicionales, en los que cada DMU busca su propia eficiencia de manera independiente, el enfoque centralizado considera una administración conjunta de los recursos con el fin de optimizar el desempeño global del sistema. En este sentido, este trabajo se basa en modelos previos como los propuestos por Lozano y Villa (2004) [Centralized Resource Allocation Using Data Envelopment Analysis[1]] y Asmild et al. (2009) [Centralized resource allocation BCC models[2]], los cuales aplican la asignación centralizada de recursos para mejorar la eficiencia agregada del conjunto de unidades, y tratará de replicar los modelos propuestos por Fang y Li (2015) [Centralized resource allocation based on the cost–revenue análisis[3]].

Abstract

The objective of this paper is the development and validation of a centralized Data Envelopment Analysis (DEA) model focused on the efficient allocation of resources under a revenue maximization criterion. The DEA methodology is widely used to evaluate the relative efficiency of a set of decision-making units (DMUs), allowing for the optimization of resources and products within a system.

Unlike traditional DEA models, in which each DMU seeks its own efficiency independently, the centralized approach considers a joint management of resources in order to optimize the overall performance of the system. In this regard, this work is based on previous models such as those proposed by Lozano and Villa (2004) and Asmild et al. (2009), which apply centralized resource allocation to improve the aggregate efficiency of the set of units, and aims to replicate the models proposed by Fang and Li (2015).

ÍNDICE

Resumen	9
Abstract	10
ÍNDICE	11
Índice de Tablas	13
Índice de Ilustraciones	15
Notación	19
1 Introducción	20
2 Metodología DEA	21
2.1. <i>Introducción a la Metodología</i>	21
2.2. <i>Índices de Eficiencia</i>	23
2.3. <i>Bases de la metodología DEA</i>	25
2.4. <i>Modelos DEA</i>	33
2.4.1. Modelos Radiales CRS	33
2.4.2. Modelos Radiales VRS	39
2.4.3. Modelo Aditivo No Orientado	43
2.4.4. Modelos No Radiales	45
3 Modelos DEA de Tipo Centralizado	47
3.1. <i>Modelos Centralizados</i>	47
3.1.1. Modelo BCC-Input-Radial	48
3.1.2. Modelo BCC-Input-No Radial	49
3.1.3. Modelo CRA-BCC-Input-Radial	50
3.1.4. Modelo CRA-BCC-Input-No Radial	51
3.1.5. Modelo CRAI-BCC-Input-Radial	52
3.1.6. Modelo CRAI-BCC-Input-No Radial	53
3.1.7. Modelo BCC-Output-Radial	54
3.1.8. Modelo BCC-Output-No Radial	55
3.1.9. Modelo CRA-BCC-Output-Radial	56
3.1.10. Modelo CRA-BCC-Output-No Radial	57
3.1.11. Modelo CRAI-BCC-Output-Radial	58
3.1.12. Modelo CRAI-BCC-Output-No Radial	59
3.2. <i>Modelos Del Artículo de Fang y Li (2015)</i>	60
3.2.1. Modelo de Eficiencia en Ingresos	60
3.2.2. Modelo de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos	63
3.2.3. Modelo de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación	66
4 Reformulación de modelos	68
4.1. <i>Modelo Reformulado de Eficiencia de Ingresos</i>	68
4.2. <i>Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos</i>	71
4.3. <i>Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación</i>	75
5 Ilustración Del Método	79

5.1.	<i>Comparativa Teórica de los Modelos</i>	79
5.2.	<i>Ejemplos del artículo de Fang y Li (2015)</i>	80
5.2.1.	Ejemplo 1	80
5.2.2.	Ejemplo 2	91
6	Análisis de Sensibilidad	100
6.1.	<i>Ejemplo 1</i>	100
6.2.	<i>Ejemplo 2</i>	104
7	Conclusión	107
	Referencias	108
	ANEXO	109

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 - Comparación Teórica Modelos	79
Tabla 2 - Datos Iniciales Ejemplo 1	81
Tabla 3 - Resultados Modelo de Eficiencia Ejemplo 2	82
Tabla 4 - Resultados Modelo con Reasignación Centralizada de Recursos Ejemplo 1	83
Tabla 5 - Resultados Modelo Reasignación Centralizada con Costes de Reasignación Ejemplo 1	84
Tabla 6 - Resultados Artículo Fang y Li (2015) Ejemplo 1	85
Tabla 7 - Datos Iniciales Ejemplo 2	91
Tabla 8 - Resultados Modelo Eficiencia Ejemplo 2	92
Tabla 9 - Resultados Modelo Reasignación Centralizada Ejemplo 2	93
Tabla 10 - Resultados Modelo Reasignación con Costes de Asignación de Recursos Ejemplo 2	94
Tabla 11 - Datos Iniciales Nuevos Precios y Costes Ejemplo 1	100
Tabla 12 - Resultados Modelo Eficiencia Nuevos Precios y Costes Ejemplo 1	101
Tabla 13 - Resultados Modelo Reasignación Centralizada de Recursos Nuevos Precios y Costes Ejemplo 1	101
Tabla 14 - Comparación Ingresos Nuevos Precios y Costes Ejemplo 1	102
Tabla 15 - Resultados Modelo con Reasignación Centralizada de Recursos Nuevos Precios y Costes Ejemplo 2	105
Tabla 16 - Comparación Ingresos Nuevos Precios y Costes Ejemplo 2	105

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1 - Tecnología CRS	26
Ilustración 2 - Tecnología VRS	27
Ilustración 3 - Tecnología FDH	28
Ilustración 4 - Orientación de Entrada	30
Ilustración 5 - Orientación de Salida	30
Ilustración 6 - No Orientado	31
Ilustración 7 - Modelo CCR-Input	33
Ilustración 8 - Modelo CCR-Input Fase 1	34
Ilustración 9 - Modelo CCR-Input Fase 2	34
Ilustración 10 - Valores Admisibles CCR-Input	35
Ilustración 11 – CCR-Input	35
Ilustración 12 - Modelo CCR-Output	36
Ilustración 13 - Modelo CCR-Output Fase 1	36
Ilustración 14 - Modelo CCR-Output Fase 2	37
Ilustración 15 - Valores Admisibles CCR-Output	37
Ilustración 16 - CCR-Output	38
Ilustración 17 - Modelo BCC-Input	39
Ilustración 18 - Valores Admisibles BCC-Input	40
Ilustración 19 - BCC-Input	40
Ilustración 20 - Modelo BCC-Output	41
Ilustración 21 - Valores Admisibles BCC-Output	41
Ilustración 22 - BCC-Output	42
Ilustración 23 - Modelo Aditivo No Orientado	43
Ilustración 24 - Aditivo No Orientado	44
Ilustración 25 - Modelo No Radial Orientación de Entrada	45
Ilustración 26 - No Radial Orientación de Entrada	45
Ilustración 27 - Modelo No Radial Orientación de Salida	46
Ilustración 28 - Modelo No Radial Orientación de Salida	46
Ilustración 29 - Modelo BCC-Input-Radial	48
Ilustración 30 - Modelo BCC-Input-No Radial	49
Ilustración 31 - Modelo CRA-BCC-Input-Radial	50
Ilustración 32 - Modelo CRA-BCC-Input-No Radial	51
Ilustración 33 - Modelo CRAI-BCC-Input-Radial	52
Ilustración 34 - Modelo CRAI-BCC-Input-No Radial	53
Ilustración 35 - Modelo BCC-Output-Radial	54

Ilustración 36 - Modelo BCC-Output-No Radial	55
Ilustración 37 - Modelo CRA-BCC-Output-Radial	56
Ilustración 38 - Modelo CRA-BCC-Output-No Radial	57
Ilustración 39 - Modelo CRAI-BCC-Output-Radial	58
Ilustración 40 - Modelo CRAI-BCC-Output-No Radial	59
Ilustración 41 - Modelo Original de Eficiencia en Ingresos	61
Ilustración 42 - Modelo Original de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos	64
Ilustración 43 - Modelo Original de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación de Recursos	67
Ilustración 44 - Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos	69
Ilustración 45 - Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos	73
Ilustración 46 - Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación de Recursos	77
Ilustración 47 - Comparación Ingresos Ejemplo 1	85
Ilustración 48 – Comparación Ingresos Ejemplo 1	86
Ilustración 49 - Cambio Porcentual X1 Ejemplo 1	86
Ilustración 50 - Cambio Porcentual Y1 Ejemplo 1	87
Ilustración 51 - Cambio Porcentual X2 Ejemplo 1	87
Ilustración 52 - Cambio Porcentual Y2 Ejemplo 1	88
Ilustración 53 - Análisis DMU 1 Ejemplo 1	88
Ilustración 54 - Análisis DMU 5 Ejemplo 1	89
Ilustración 55 - Análisis DMU 13 Ejemplo 1	89
Ilustración 56 - Análisis DMU 19 Ejemplo 1	90
Ilustración 57 - Comparación Ingresos Ejemplo 2	94
Ilustración 58 - Comparación Ingresos Ejemplo 2	95
Ilustración 59 - Cambio Porcentual X1 Ejemplo 2	95
Ilustración 60 - Cambio Porcentual Y3 Ejemplo 2	96
Ilustración 61 - Cambio Porcentual Y2 Ejemplo 2	96
Ilustración 62 - Cambio Porcentual Y1 Ejemplo 2	96
Ilustración 63 - Cambio Porcentual Y5 Ejemplo 2	97
Ilustración 64 - Cambio Porcentual Y4 Ejemplo 2	97
Ilustración 65 - Análisis DMU 1 Ejemplo 2	98
Ilustración 66 - Análisis DMU 4 Ejemplo 2	98
Ilustración 67 - Análisis DMU 13 Ejemplo 2	99
Ilustración 68 - Análisis DMU 19 Ejemplo 2	99
Ilustración 69- Comparación Ingresos Ejemplo 1	102
Ilustración 70 - Comparación Ingresos Ejemplo 2	106
Ilustración 71 - Análisis DMU 1 Ejemplo 1	118
Ilustración 72 - Análisis DMU 2 Ejemplo 1	118

Ilustración 73 - Análisis DMU 3 Ejemplo 1	119
Ilustración 74 - Análisis DMU 4 Ejemplo 1	119
Ilustración 75 - Análisis DMU 5 Ejemplo 1	120
Ilustración 76 - Análisis DMU 6 Ejemplo 1	120
Ilustración 77 - Análisis DMU 7 Ejemplo 1	121
Ilustración 78 - Análisis DMU 8 Ejemplo 1	121
Ilustración 79 - Análisis DMU 9 Ejemplo 1	122
Ilustración 80 - Análisis DMU 10 Ejemplo 1	122
Ilustración 81 - Análisis DMU 11 Ejemplo 1	123
Ilustración 82 - Análisis DMU 12 Ejemplo 1	123
Ilustración 83 - Análisis DMU 13 Ejemplo 1	124
Ilustración 84 - Análisis DMU 14 Ejemplo 1	124
Ilustración 85 - Análisis DMU 15 Ejemplo 1	125
Ilustración 86 - Análisis DMU 16 Ejemplo 1	125
Ilustración 87 - Análisis DMU 17 Ejemplo 1	126
Ilustración 88 - Análisis DMU 18 Ejemplo 1	126
Ilustración 89 - Análisis DMU 19 Ejemplo 1	127
Ilustración 90 - Análisis DMU 20 Ejemplo 1	127
Ilustración 91 - Análisis DMU 1 Ejemplo 2	128
Ilustración 92 - Análisis DMU 2 Ejemplo 2	128
Ilustración 93 - Análisis DMU 3 Ejemplo 2	129
Ilustración 94 - Análisis DMU 4 Ejemplo 2	129
Ilustración 95 - Análisis DMU 5 Ejemplo 2	129
Ilustración 96 - Análisis DMU 6 Ejemplo 2	130
Ilustración 97 - Análisis DMU 7 Ejemplo 2	130
Ilustración 98 - Análisis DMU 8 Ejemplo 2	130
Ilustración 99 - Análisis DMU 9 Ejemplo 2	131
Ilustración 100 - Análisis DMU 10 Ejemplo 2	131
Ilustración 101 - Análisis DMU 11 Ejemplo 2	132
Ilustración 102 - Análisis DMU 12 Ejemplo 2	132
Ilustración 103 - Análisis DMU 13 Ejemplo 2	132
Ilustración 104 - Análisis DMU 14 Ejemplo 2	133
Ilustración 105 - Análisis DMU 15 Ejemplo 2	133
Ilustración 106 - Análisis DMU 16 Ejemplo 2	134
Ilustración 107 - Análisis DMU 17 Ejemplo 2	134
Ilustración 108 - Análisis DMU 18 Ejemplo 2	134
Ilustración 109 - Análisis DMU 19 Ejemplo 2	135
Ilustración 110 - Análisis DMU 20 Ejemplo 2	135

Notación

DEA	Data Envelopment Analysis
DMU	Decision Making Unit
CRS	Constant Returns to Scale
VRS	Variable Returns to Scale
CCR	Charnes Cooper y Rhodes
BCC	Banker Charnes y Cooper
CRA	Centralized Resource Allocation
CRAI	Centralized Resource Allocation model for inefficient DMU
MPSS	Most Productive Scale Size
NIRS	Non Increasing Returns to Scale
NDRS	Non Decreasing Returns to Scale
FDH	Free Disposal Hull
DRS	Decreasing Returns to Scale
IRS	Increasing Returns to Scale

1 INTRODUCCIÓN

En el mundo de la investigación operativa y la toma de decisiones, los modelos centralizados están ganando cada vez más importancia porque ofrecen una visión más completa de los sistemas que queremos analizar. A diferencia del enfoque tradicional de DEA, que evalúa cada DMU de manera aislada, los modelos centralizados nos brindan una perspectiva más amplia, considerando todas las unidades como parte de un sistema interconectado.

Con este enfoque, no solo podemos detectar ineficiencias específicas, sino que también podemos optimizar el rendimiento general del sistema. Esto se hace teniendo en cuenta las sinergias y las relaciones entre las distintas DMUs. Así, el análisis se desplaza de centrarse solo en mejoras individuales hacia estrategias colectivas que permiten utilizar menos recursos o aumentar la producción total, facilitando decisiones más coherentes y alineadas con los objetivos globales de eficiencia.

Generalmente, en los análisis de eficiencia, los modelos DEA descentralizados son los más utilizados. Sin embargo, hay momentos en que es más conveniente optar por modelos DEA centralizados, especialmente en organizaciones que manejan varias unidades de decisión. En estructuras jerárquicas con varios niveles, los recursos utilizados y los productos generados no se pueden atribuir solo a unidades individuales porque son parte de un sistema interdependiente.

Este enfoque es muy útil al analizar entidades como empresas, hospitales o instituciones educativas, donde múltiples DMUs comparten entradas y salidas. En estos casos, los modelos DEA centralizados permiten evaluar la eficiencia desde un punto de vista global, asegurando que la organización principal pueda optimizar el uso de recursos o maximizar la producción conjunta. De esta forma, la gestión centralizada busca mejorar el rendimiento de las unidades bajo su dirección, minimizando el consumo total de recursos o aumentando la producción total para lograr una eficiencia más equilibrada y sostenible.

El artículo científico (Fang y Li, 2015) que respalda este trabajo presenta un modelo DEA centralizado que permite redistribuir recursos o entradas dentro de un sistema de DMUs con el objetivo de maximizar los ingresos generados. A diferencia de los enfoques tradicionales que evalúan la eficiencia en ingresos, el modelo propuesto incluye un análisis de costes e ingresos para determinar si la reasignación de recursos es beneficiosa económicamente. A través de un estudio aplicado a una cadena de restaurantes de comida rápida, se demuestra que implementar una estrategia centralizada puede aumentar notablemente las ganancias, siempre que el coste de redistribución no supere las ganancias obtenidas.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presenta la metodología DEA, cubriendo sus fundamentos y los modelos más destacados del enfoque no centralizado. Luego, en el Capítulo 3, se desarrollan diferentes modelos de optimización, incluyendo BCC-Input-radial, BCC-Input-no-radial, CRA-BCC-Input-radial, CRA-BCC-Input-no-radial, CRAI-BCC-Input-radial y CRAI-BCC-Input-no-radial, junto con sus versiones orientadas a la salida: BCC-Output-radial, BCC-Output-no-radial, CRA-BCC-Output-radial, CRA-BCC-Output-no-radial, CRAI-BCC-Output-radial y CRAI-BCC-Output-no-radial. En el Capítulo 4, se muestran estos modelos reformulados y adaptados a la lógica seguida en la asignatura de Métodos de Optimización. En el Capítulo 5, se ilustran y analizan los resultados y en el Capítulo 6, se muestra un análisis de sensibilidad de los modelos a la variación de los precios de las variables de salida. Por último, en el Capítulo 7 se recogen las principales conclusiones del estudio. Además, al final del documento se incluye un Anexo con las formulaciones de los modelos en Lingo y el trato de los ficheros Excel.

2 METODOLOGÍA DEA

2.1. Introducción a la Metodología

La productividad de una unidad productiva se refiere a la relación entre los resultados obtenidos y los recursos empleados para lograrlos, siendo una manera de medir la eficiencia en el uso de estos recursos. La fórmula matemática propuesta por Farrell en 1957 se expresa de la siguiente manera:

$$\text{Productividad} = \frac{\text{Producción creada}}{\text{Recurso consumido}} = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}}$$

Donde, "salida" representa el resultado obtenido y "entrada" el recurso utilizado. [[4] Villa, G. Fundamentos del Análisis por Envoltura de Datos (DEA)]

Evaluar la productividad es útil cuando la unidad productiva puede decidir sobre la cantidad de recursos que utiliza o la cantidad de resultados que produce. Por ello, a esta unidad se le llama "Decision Making Unit", en inglés. Si sólo hubiera un resultado y un recurso, la fórmula de Farrell sería suficiente. Sin embargo, en muchos casos hay varios resultados y recursos, complicándose la evaluación de la productividad.

El primer paso es identificar todos los factores relevantes para alcanzar los objetivos de la unidad productiva. Por ejemplo, en una fábrica de automóviles, el objetivo es producir coches, pero ¿cuáles son los recursos clave para lograrlo? Es tarea del analista decidir la importancia de cada recurso para obtener el resultado, de modo que se pueda sentar una buena base de cara a un estudio eficiente. En cuanto al ejemplo comentado, veámoslo con detalle:

Objetivo: Producir coches de alta calidad.

Recursos Clave:

- ❖ Mano de obra: Trabajadores con diferentes habilidades, como ensambladores, ingenieros y técnicos.
- ❖ Materiales: Componentes como motores, chasis, neumáticos, etc.
- ❖ Maquinaria: Equipos de ensamblaje, robots industriales, herramientas especializadas.
- ❖ Energía: Electricidad y otros combustibles necesarios para operar la maquinaria.
- ❖ Tiempo: Horas de trabajo dedicadas a la producción.

El segundo paso consistiría en la identificación de factores relevantes, debiendo el analista identificar todos los recursos que influyen en la producción de coches. En este caso, se consideran la mano de obra, los materiales, la maquinaria, la energía y el tiempo.

El tercer paso trataría sobre la medición de recursos, debiendo ser cada recurso medido para determinar su grado de utilización. En nuestro ejemplo:

- ❖ Mano de obra: Número de horas trabajadas por los empleados.
- ❖ Materiales: Cantidad de componentes utilizados.
- ❖ Maquinaria: Horas de operación de las máquinas.
- ❖ Energía: Consumo de electricidad y otros combustibles.
- ❖ Tiempo: Tiempo total empleado en la producción de cada coche.

Algunos recursos pueden ser difíciles de medir. Por ejemplo, evaluar la habilidad de los trabajadores puede ser complicado. Se podrían usar indicadores como la experiencia, la formación y la eficiencia en el trabajo.

El cuarto paso constaría de la evaluación de la productividad, una vez medidos los recursos. Aunque haya varios resultados (diferentes modelos de coches) y varios recursos, la productividad de la DMU es un valor escalar, de modo que se necesitaría una expresión que incluya todas las entradas y salidas.

Para resolver el problema de diferentes unidades de medida, se utilizan los conceptos de entrada y salida virtual. Esto implica agregar las salidas y entradas escaladas mediante un peso, haciendo el resultado adimensional e independiente de la escala utilizada.

$$\text{Entrada virtual}_j = \sum_{i=1}^m u_{ij}x_{ij}$$

$$\text{Salida virtual}_j = \sum_{k=1}^s v_{kj}y_{kj}$$

En este caso, la productividad se obtendría con el cociente entre el número total de coches producidos y la suma ponderada y agregada de todos los recursos utilizados durante el proceso de fabricación:

$$\text{Productividad} = \frac{\text{Número de coches producidos}}{w_1 \cdot \text{Horas de mano de obra} + w_2 \cdot \text{Cantidad de materiales} + w_3 \cdot \text{Horas de maquinaria} + w_4 \cdot \text{Consumo energético} + w_5 \cdot \text{Tiempo total por coche}}$$

Donde las w serían los pesos o ponderaciones que se han asignado a los diferentes recursos en función de su importancia a la hora de perseguir el resultado obtenido. Quedando estandarizada la fórmula en casos generales de la siguiente forma:

$$\text{Productividad}_j = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kj}y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij}x_{ij}}$$

Dicha expresión está compuesta por los términos x_{ij} , siendo la cantidad de entrada o recurso i utilizado por la unidad j , y por el término y_{kj} , siendo la cantidad de salida o resultado k que produce la misma unidad j . A su vez, estos términos están siendo ponderados respectivamente por sus pesos u_{ij} y v_{kj} y con m y s como número total de entradas consideradas y número total de salidas de la unidad, respectivamente.

Finalmente, se puede observar cómo se pueden ir complicando los diferentes escenarios en función de los recursos y las salidas que se tengan, antojándose indispensable un sistema que trate de estandarizar todos estos tipos de análisis, desarrollando modelos de estudios de optimización de problemas reales, es decir, la metodología DEA.

Esto que se ha desarrollado para introducir en una primera instancia la metodología DEA se ha hecho a través de variables con pesos multiplicadores tanto para las entradas como para las salidas, aunque no serán este tipo de variables las que se desarrollen en este trabajo, si no aquellas usan sus formulaciones envolventes, las cuales serán explicadas más adelante.

2.2. Índices de Eficiencia

El cálculo de la productividad de una determinada unidad productiva engloba el caso más general de múltiples entradas y salidas. Sin embargo, por separado no da ninguna referencia de cómo se están aprovechando o desaprovechando los recursos de los que se disponen para producir los resultados, no pudiendo comparar la eficacia con la que se emplean los recursos con respecto a los resultados que se obtienen con otras unidades similares. Es decir, cuando una DMU se compara con otras DMU semejantes, el estudio de la eficiencia puede resultar más interesante:

$$Eficiencia_j = \frac{Productividad_j}{Productividad_o} = \frac{\frac{Salida\ virtual_j}{Entrada\ virtual_j}}{\frac{Salida\ virtual_o}{Entrada\ virtual_o}}$$

En esta expresión, al igual que en las anteriores, el subíndice j refleja la DMU que se va a estudiar, y en este caso, el subíndice o representa la DMU con la que se va a comparar, o unidad de referencia. Existen varios tipos de eficiencias, las cuales se distinguen en función de la unidad de referencia que se utilice:

- ❖ **Eficiencia Global:** se trata de eficiencia global cuando se hace el estudio escogiendo como unidad de referencia la de mayor productividad de entre las que se están comparando.

Por ejemplo, si una empresa de producción de coches tiene varias plantas situadas en diferentes países y quiere hacer un estudio para ver cómo de eficientes globalmente hablando son sus plantas. En este caso, tomará como DMU de referencia a la planta A, que es la que más vehículos por unidad de recurso utilizado produce. Este tipo de eficiencia es más conveniente usarla a la hora de encontrar la mejor opción en términos absolutos, sin importar tanto otros factores como puede ser, por ejemplo, el tamaño de la fábrica de vehículos, en este caso.

- ❖ **Eficiencia Técnica:** se trata de eficiencia técnica cuando se hace el estudio escogiendo como unidad de referencia la de mayor productividad de entre las unidades de su tamaño, de entre sus “homólogas”.

Siguiendo con el ejemplo de la fábrica de coches, si la empresa quiere comparar una planta con otras plantas de su misma condición, por ejemplo, con plantas que sean similares a ella en cuanto a tamaño, se considerará más eficiente técnicamente a la planta que más vehículos por unidad de recurso utilizada produzca al año de entre las plantas de su tamaño, en este caso. Este tipo de comparación es útil cuando sí se pretende tener en cuenta otros factores, no hacer una comparación en términos absolutos, si no llevar a cabo una comparativa más equitativa, más “de igual a igual”.

- ❖ **Eficiencia de Escala:** se trata de eficiencia de escala cuando se hace el cociente entre la eficiencia global y la eficiencia técnica. Este tipo de comparativas son conveniente hacerlas cuando se pretenden tomar decisiones estratégicas, como con el ejemplo anterior, sí pudiera ser la de cerrar una planta en la situación de que su eficiencia de escala fuese lejana a la unidad, eso indicaría que no estaría funcionando muy cerca de sus posibilidades óptimas.

La eficiencia relativa de cualquier DMU siempre será menor o igual que la unidad, llamándose DMU eficiente a aquella unidad cuya eficiencia sea igual a la unidad. En el caso en que la eficiencia no sea igual a la unidad, la DMU será ineficiente, ya que existirá alguna otra DMU con una eficiencia mayor que la suya.

Por definición, la expresión de la eficiencia de una DMU quedaría de la siguiente forma:

$$Eficiencia_j = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \bigg|_0$$

Es importante recalcar que, al aplicar esta fórmula, se pueden dar infinitas combinaciones de pesos que asignan la misma eficiencia a una unidad. Es decir, si una combinación de vectores de pesos (u_{ij}, v_{kj}) otorga una determinada eficiencia relativa, cualquier otra combinación del tipo $(\alpha \cdot u_{ij}, \beta \cdot v_{kj})$, siendo α y β valores reales positivos, se obtendrá el mismo valor de eficiencia.

Para tratar de reducir el número de soluciones equivalentes y evitar este problema, se establece que la DMU de referencia, es decir, la más eficiente, tenga como una productividad igual a la unidad. De manera que, independientemente del tipo de eficiencia que se esté valorando, se adopta que el denominador de la expresión sea siempre igual a la unidad, tomándose como referencia una unidad eficiente, pudiéndose expresar la fórmula de la eficiencia de manera más sencilla y coherente, en concreto, de la siguiente forma:

$$Eficiencia_j = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}}$$

Esta será la fórmula que se use de aquí en adelante en los modelos DEA que se van a ir exponiendo.

2.3. Bases de la metodología DEA

El Análisis Envolvente de Datos es una metodología potente que, como ha sido explicado, se usa con el fin de estudiar o evaluar la eficiencia relativa de las unidades de toma de decisiones, las cuales son muy útiles para el caso de empresas, organizaciones u otros, en función de las numerosas entradas y salidas. Es sabido que el enfoque de DEA reside en aglomerar estas unidades de toma de decisiones en conjuntos de posibilidades de producción o de decisión, representando todas las combinaciones posibles de salidas que podrían ser generadas por una unidad de toma de decisiones eficiente. [[5] Programación y validación de modelos básicos DEA de tipo centralizado]

Este conjunto o aglomerado de posibilidades de producción se entiende como una “frontera” la cual delimita las combinaciones factibles que una unidad de toma de decisiones puede llegar a alcanzar realmente, pudiendo operar ésta en la frontera, siendo las DMU ineficientes las que operan debajo de la misma. Para fundamentar DEA y poder definir bien estas fronteras, la metodología se basa en una serie de axiomas que ayudan a determinar criterios claros para la eficiencia:

1. Envoltura (Envelopment): Conjunto de posibilidades de producción.

$$(x_j, y_j) \in T \quad \forall j$$

2. Libre Disponibilidad (Free Disponibility): Hace referencia a que una unidad no es eficiente si desperdicia entradas. Es decir, si una unidad es eficiente, no puede reducir el uso de una entrada sin afectar a la generación de salidas.

$$(x, y) \in T \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) \in T \quad \forall \hat{x} \geq x, \hat{y} \leq y$$

3. Convexidad (Convexity): Establece que, si dos puntos pertenecen a la tecnología, los puntos intermedios en la recta que los une, obtenidos mediante combinación convexa, también son pertenecientes a dicha tecnología, reflejando la idea de que las unidades eficientes deben poder combinar sus entradas o recursos para generar sus salidas de forma flexible.

$$(x_1, y_1) \in T, (x_2, y_2) \in T \Rightarrow \lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) \in T \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$

4. Escalabilidad (Scalability): Si un punto pertenece a la tecnología T, todos aquellos puntos que pertenezcan a la línea que un dicho punto con el origen también formará parte de la tecnología T. Dentro de la Escalabilidad, se pueden encontrar dos tipos:

- 4.1. Rendimientos de Escala Creciente (Upward Scalability): Las salidas aumentan más que proporcionalmente con las entradas.

- 4.2. Rendimientos de Escala Decreciente (Downward Scalability): Las salidas aumentan menos que proporcionalmente con las entradas.

$$(x, y) \in T \rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in T \quad \forall \lambda \geq 0$$

Siendo:

n : número total de DMUs

m : número de entradas

s : número de salidas

x : vector de dimensiones ($m \times 1$)

X : matriz de entradas observadas (dimensiones $m \times n$)

y : vector de dimensiones ($s \times 1$)

Y : matriz de salidas observadas (dimensiones $s \times n$)

λ : vector de dimensiones ($n \times 1$)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

Al aplicar los axiomas expuestos y el principio de mínima extrapolación, se pueden deducir una serie de tecnologías mínimas sobre las cuales se van a basar los modelos DEA que se van a ir exponiendo:

- ❖ Retorno de Escala Constante (CRS): Si se aplica el principio de mínima extrapolación y se considera el mínimo conjunto de puntos que cumplen las cuatro propiedades citadas, se obtiene la tecnología CRS, la cual está compuesta por todos los puntos que surgen como combinación lineal de todas las observaciones más todos aquellos puntos que operan por debajo. En esta tecnología, cualquier unidad puede alcanzar la productividad de las unidades eficientes, siendo la eficiencia global la que se estudia al tener todas las DMUs como referencia a las de mayor productividad.

$$T_{CRS} = \{(\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}X \leq \bar{x}; \bar{\lambda}Y \geq \bar{y}\}$$

La representación del conjunto para una sola entrada y salida sería la siguiente:

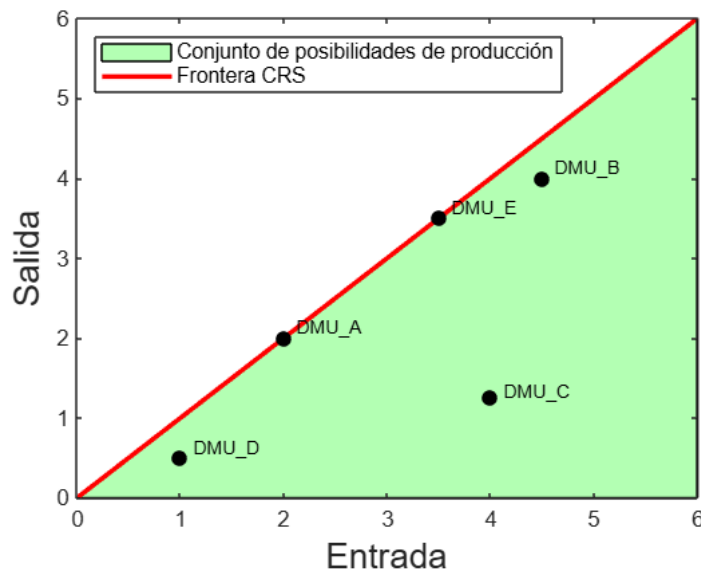


Ilustración 1 - Tecnología CRS

Se puede observar que los puntos son las unidades reales observadas en el problema y el conjunto de la Tecnología CRS se trataría de la zona sombreada en celeste, pudiéndose deducir que los puntos que pertenecen al conjunto tienen tecnologías admisibles.

- ❖ Retorno de Escala Variable (VRS): Se obtiene de la misma forma que la tecnología CRS, pero sin aplicar el axioma de la escalabilidad, siendo esta tecnología más conservadora que la anterior, y, por tanto, estar compuesta por un menor conjunto de posibilidades. En este caso, el estudio se lleva a cabo mediante la eficiencia técnica, por el hecho de considerar que algunas unidades de tamaño diferente al de las eficiente pueden no ser capaces de conseguir la productividad de éstas, refiriéndose cada DMU a la de productividad mayor de entre las de su tamaño.

$$T_{VRS} = \{(\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}X \leq \bar{x}; \bar{\lambda}Y \geq \bar{y}; \bar{\lambda}e^T = 1\}$$

A diferencia del caso anterior, la suma de los componentes del vector λ debe ser la unidad. La representación del conjunto para el caso de una sola entrada y salida sería la siguiente:

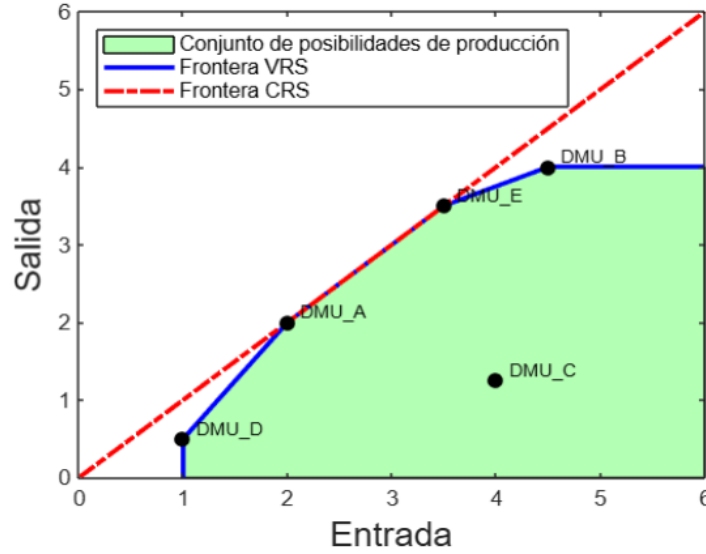


Ilustración 2 - Tecnología VRS

Se puede observar que los puntos son las unidades reales observadas en el problema y el conjunto de la Tecnología CRS se trataría de la zona sombreada en celeste. Se puede deducir que los puntos que pertenecen al conjunto tienen tecnologías admisibles. También se puede apreciar el segmento que une DMUA – DMUC, el cual correspondería al lugar geométrico donde ambas fronteras son coincidentes, tanto la CRS como la VRS, esto quiere decir que son las DMUs más productivas o que pueden dar mejores resultados, al estar admitidas por ambas tecnologías. Su nombre técnico es el Tamaño de Escala Más Productivo (MPSS).

- ❖ Existen dos tecnologías intermedias a las tecnologías CRS y VRS, que son las que surgen de aplicar los axiomas 1, 2, 3 y 4.1 y, por otra parte, los 1, 2, 3 y 4.2. Éstas son las tecnologías con retornos de escala no decrecientes, NDRS (Non-Decreasing) y con retornos de escala no crecientes, NIRS (Non-Increasing).

$$T_{NIRS} = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}X \leq \bar{x}; \bar{\lambda}Y \geq \bar{y}; \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1 \right\}$$

$$T_{NDRS} = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}X \leq \bar{x}; \bar{\lambda}Y \geq \bar{y}; \sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 1 \right\}$$

- ❖ La siguiente tecnología, FDH (Free Disposal Hull), surge al no imponer las condiciones de escalabilidad ni convexidad. Esta última puede no tener sentido cuando las unidades son enteras y se utilizaría esta tecnología, aunque según ella casi todas las observaciones son eficientes. Por tanto, no es una tecnología muy útil, ya que hace complicada la elección de ineficiencias.

$$T_{FDH} = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) : \exists \bar{\lambda} \geq 0, \bar{\lambda}X \leq \bar{x}; \bar{\lambda}Y \geq \bar{y}; \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \in \{0, 1\} \right\}$$

La representación gráfica de estas últimas tecnologías sería la siguiente:

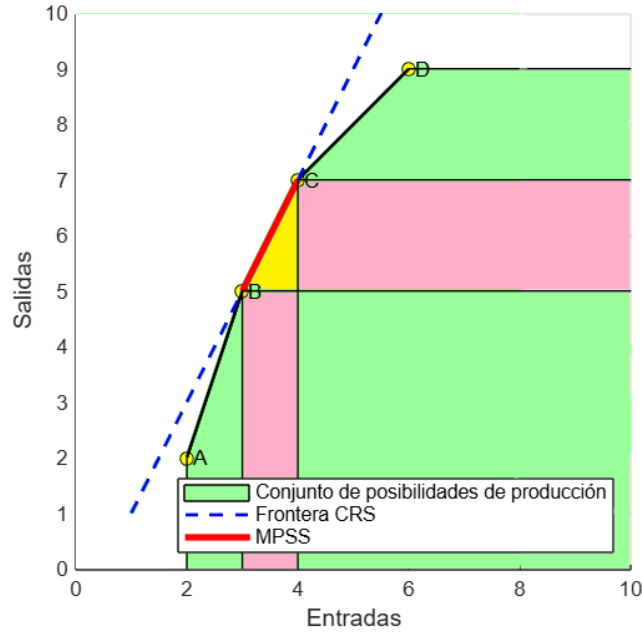


Ilustración 3 - Tecnología FDH

Donde se aprecian los siguientes segmentos a destacar:

- ❖ MPSS: segmento rojo que va desde B hasta C. Representa el conjunto de puntos de la frontera eficiente donde se alcanza la máxima productividad de escala, siendo unidades eficientes ya sea bajo rendimientos constantes, es decir, sujetos a la tecnología CRS, como con rendimientos variables, en el caso de la tecnología VRS.
- ❖ DRS: segmento que une el punto C con el D. Este segmento indica que el incremento de las entradas va a significar un aumento mayor, proporcionalmente hablando, que en las salidas. Por ello, esto quiere decir que hay un margen mayor para crecer con eficiencia, no habiendo alcanzado aún su escala óptima.
- ❖ IRS: segmento que une el punto A con el B. Este segmento indica que al aumentar las entradas se va a producir un aumento menos, proporcionalmente hablando, que en las salidas. Por ello, en esta fase sería mejor reorganizar los recursos, en lugar de aumentarlos.

De todas estas tecnologías que surgen de combinar los distintos axiomas que han sido expuestos, se pueden sacar varias conclusiones en lo que respecta a las eficiencias:

$$T_{FDH} \subseteq T_{VRS} \subseteq \{T_{NIRS}, T_{NDRS}\} \subseteq T_{CRS} \Rightarrow Eff_{FDH} \geq Eff_{VRS} \geq \{Eff_{NIRS}, Eff_{NDRS}\} \geq Eff_{CRS}$$

Esto indica que el conjunto FDH está contenido en el conjunto VRS, que a su vez está contenido en la unión de los conjuntos NIRS y NDRS, que del mismo modo están contenidos en el conjunto CRS. Dicho esto, de la misma forma que se relacionan los conjuntos, lo hacen también sus eficiencias, esto se debe al hecho de estar contenido un conjunto A en otro B, significa que todas las opciones de A están en el B, implicando que A tiene menos restricciones y puede elegir las mejores opciones dentro de B, lo que generalmente puede resultar en una mayor eficiencia.

En cuanto a la comparativa a nivel de eficiencias hablando sobre las diferentes fases que componen las tecnologías, se pueden establecer las siguientes afirmaciones:

$$\begin{aligned}
 Eff_{CRS} \leq Eff_{NIRS} \leq Eff_{VRS} & \Rightarrow \text{Most productive scale size (MPSS):} & Eff_{VRS} = Eff_{CRS} & \Leftrightarrow & Eff_{escala} = 1 \\
 & \text{IRS (Increasing returns to scale).} & Eff_{CRS} = Eff_{NIRS} < Eff_{VRS} \\
 & \text{DRS (Decreasing returns to scale).} & Eff_{CRS} < Eff_{NIRS} = Eff_{VRS}
 \end{aligned}$$

En cuanto a la relación entre eficiencias, como se ha expuesto antes, la tecnología VRS, al ser la más restrictiva es la que más eficiencia tiene.

En cuanto al MPSS, esto ocurre cuando la eficiencia de escala es igual a la unidad, indicando que la DMU está operando en su tamaño de escala más productiva, es decir, no puede rendir a mayor nivel que ese. Sobre el IRS, esto sugiere que la DMU puede aumentar su producción o mejorar su rendimiento de manera más eficiente al incrementar su escala, y como se ha expuesto antes, el conjunto NIRS se solapa con el CRS, siendo estos conjuntos de menor eficiencia que la tecnología IRS, la cual coincide con la VRS. Por último, a nivel del DRS, esto sugiere que la DMU se vuelve menos eficiente al aumentar su salida, estando la tecnología NDRS solapada con el conjunto CRS, y el conjunto DRS siendo el cual coincide con la VRS, la tecnología más eficiente.

En resumen, se puede extraer de toda esta explicación que los modelos DEA pueden clasificarse según el tipo de tecnología por el cual estén regidos:

- ❖ CRS
- ❖ VRS
- ❖ NIRS
- ❖ NDRS
- ❖ FDH

Pero también se pueden clasificar según otros criterios como el tipo de medida de eficiencia que puedan proporcionar (modelos radiales y modelos no radiales) o según la orientación (orientación de entrada, orientación de salida y no orientado).

En cuanto a la métrica del modelo, se pueden dar dos escenarios, el modelo radial y el modelo no radial:

- ❖ Modelo Radial: es un tipo de modelo que reduce las entradas o incrementa las salidas de forma proporcional, con el mismo valor multiplicador, necesitando usar el concepto de holgura para conseguir la eficiencia.
- ❖ Modelo No Radial: es un tipo de modelo que consta de un factor multiplicador para cada entrada y/o salida, a diferencia del modelo radial, adaptándose directamente a la frontera eficiente.

En cuanto a la orientación del modelo, se pueden clasificar los modelos en tres tipos:

- ❖ Modelos con Orientación de Entrada (Input Orientation): este tipo de modelos buscan conseguir el resultado reduciendo los recursos que consumen, es decir, tratan de obtener la productividad de la unidad eficiente a través de la reducción de los inputs que reciben, en lugar de centrarse en las salidas. Una unidad no será eficiente si puede disminuir cualquiera de sus inputs sin modificar sus outputs. Esta sería la representación gráfica:

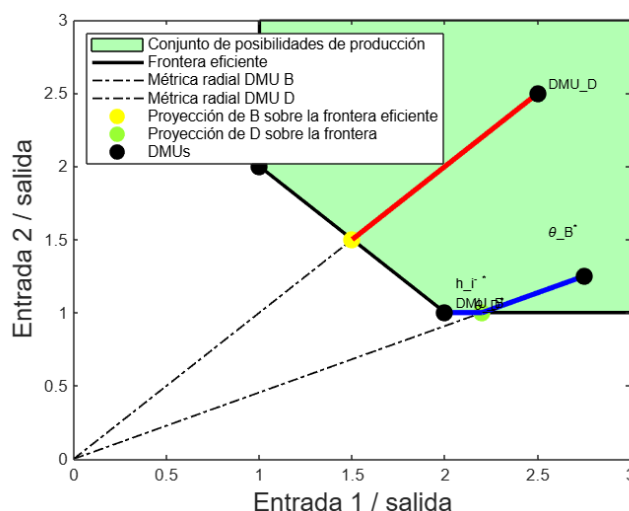


Ilustración 4 - Orientación de Entrada

- ❖ Modelos con Orientación de Salida (Output Orientation): este tipo de modelos tratan de obtener el resultado mediante el aumento de salidas que producen, es decir, persiguen conseguir la productividad de la unidad eficiente a través del aumento de los outputs que generan. Una unidad no es eficiente si es posible incrementar cualquier output sin incrementar ningún input y sin disminuir ningún otro output. Esta sería la representación gráfica:

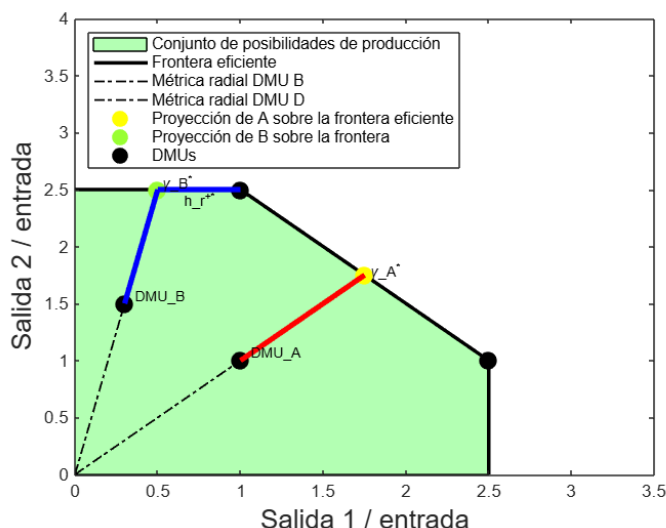


Ilustración 5 - Orientación de Salida

- ❖ Modelo No Orientado: son aquellos modelos que toman una postura neutral en este aspecto, no se centran ni en aumentar los outputs ni en reducir los inputs.

Con esta representación se puede apreciar cómo se proyectan las DMU sobre la frontera eficiente en busca de los puntos de estudio en función del tipo de orientación del cual conste el modelo:

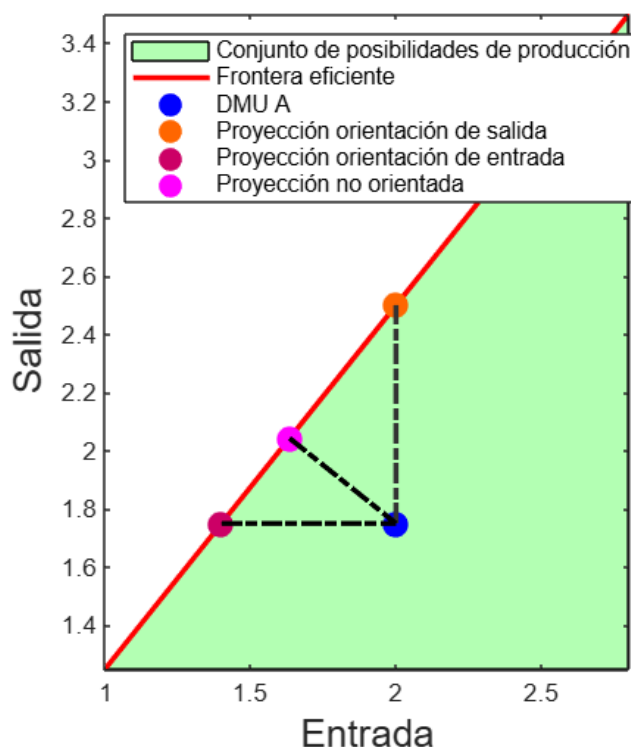


Ilustración 6 - No Orientado

Antes de empezar a analizar cada uno de los distintos modelos DEA que van a ser expuestos en este trabajo, es fundamental estudiar las virtudes y los defectos del uso de esta metodología.

Una de las principales ventajas de la metodología DEA es que se trata de un enfoque no paramétrico, lo que significa que no impone una forma funcional específica sobre la relación entre los inputs y los outputs. Tampoco asume una distribución concreta para la ineficiencia, lo que aporta flexibilidad al análisis. Además, destaca por su capacidad para trabajar con múltiples variables de entrada y salida, incluso si están expresadas en distintas unidades de medida.

Otra gran fortaleza de DEA es que permite identificar qué unidades son eficientes, actuando como referencia o “best practice” para el resto. Esto lo convierte en una herramienta muy útil para comparar diferentes unidades de decisión, pudiendo proporcionar una medida de eficiencia relativa. Es decir, permite saber qué tan bien lo está haciendo una unidad respecto a otras similares, otorgando una puntuación única que permite posicionarla frente a sus comparables y detectar cuánto margen de mejora tiene.

Es importante señalar que DEA no mide la eficiencia de forma absoluta (no se compara con un ideal teórico), sino en relación con el conjunto analizado. Además, permite fijar objetivos concretos (targets) para que las unidades menos eficientes sepan hacia dónde deben dirigirse.

Además, uno de sus puntos más atractivos es su amplia aplicabilidad. DEA puede utilizarse en sectores muy diversos: desde hospitales, colegios o universidades, hasta bancos, aerolíneas, restaurantes, hoteles, equipos deportivos, explotaciones agrícolas o centrales energéticas, entre otros.

Por último, otro de los conceptos clave que se deben entender a la hora de hablar de la metodología DEA son los de variables discrecionales y no discrecionales. En DEA, es fundamental distinguir entre variables discrecionales y no discrecionales, ya que esta clasificación afecta directamente a cómo se interpretan las decisiones y a qué grado de mejora se le puede exigir a cada unidad evaluada. Esta diferencia es especialmente importante en situaciones donde no todos los recursos pueden gestionarse libremente, en el estudio que se hará después quedará claramente reflejada la importancia de este concepto.

Las variables discrecionales son aquellas sobre las que la unidad tiene control o capacidad de decisión. Es decir, pueden modificarse, redistribuirse o reducirse en función de la estrategia o de la gestión interna. Por ejemplo, el número de trabajadores, el presupuesto para formación o el consumo energético son factores que una organización puede ajustar dentro de ciertos márgenes, por lo que se consideran discrecionales.

En cambio, las variables no discrecionales son aquellas que están fuera del control directo de la unidad. Pueden deberse a condiciones estructurales, normativas o características del entorno que no pueden ser modificadas por decisión propia. Estas variables deben tratarse como constantes dentro del modelo, ya que no tiene sentido exigir a la unidad que las optimice.

Un ejemplo muy claro se puede ver en el análisis de eficiencia de centros de salud públicos. Supongamos que evaluamos varios ambulatorios para medir su rendimiento. El número de médicos contratados o el número de consultas atendidas podrían considerarse variables discrecionales, ya que en muchos casos la dirección del centro tiene cierto margen para reorganizar horarios o gestionar la carga de trabajo. Sin embargo, el número de habitantes asignados a cada centro sería una variable no discrecional, ya que viene determinada por criterios administrativos o geográficos, y el centro no puede decidir sobre ello.

Incorporar correctamente esta distinción en los modelos DEA mejora notablemente la calidad del análisis y evita comparar unidades con realidades no comparables. Es un paso esencial para obtener resultados justos y aplicables desde un punto de vista operativo.

Una vez se tiene la tecnología (definida por los axiomas), se pueden definir modelos que proyectan sobre la frontera eficiente, la cual está constituida por el conjunto de puntos no dominados, de forma que dependiendo del modelo se podrá determinar un índice de eficiencia que, de algún modo, mida la distancia de una DMU a la frontera eficiente. En la siguiente fase del trabajo serán expuestos estos modelos.

2.4. Modelos DEA

2.4.1. Modelos Radiales CRS

En esta sección se presentan los modelos DEA que tienen como objetivo evaluar la eficiencia relativa de cada una de las DMUs involucradas en un determinado problema. Para ello, se utiliza como referencia la unidad más productiva observada. Se comienza con los modelos que suponen retornos constantes a escala, concretamente el modelo CCR orientado a entradas y el modelo CCR orientado a salidas.

En el caso del modelo con orientación a entradas, una unidad mejora su eficiencia si consigue reducir el uso de recursos hasta igualar la productividad de la unidad de referencia. En cambio, en el modelo orientado a salidas, la eficiencia se alcanza incrementando la cantidad de salidas obtenidas, manteniendo constante el nivel de recursos empleados.

2.4.1.1 Modelo CCR-INPUT

El modelo CCR-INPUT (propuesto por Charnes, Cooper y Rhodes) es uno de los enfoques más clásicos dentro de la metodología DEA. Este modelo asume retornos constantes a escala, lo que implica que, si se duplican los recursos, también deberían duplicarse las salidas. En su versión orientada a entradas, el objetivo principal es minimizar la cantidad de recursos utilizados por cada unidad, manteniendo constantes las salidas generadas. Esta sería su expresión matemática:

$$\begin{aligned} \text{MIN} \quad & \theta_J - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\ \text{s.a.} \quad & \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_J x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

$$\theta_J \text{ libre}$$

Ilustración 7 - Modelo CCR-Input

Las variables que aparecen en el modelo son, λ_j , θ_J , h_j^- , h_k^+ , siendo éstas capaces de modificar los valores tanto en la entrada como en la salida para conseguir alcanzar la eficiencia.

Este modelo consta de dos fases. En esta primera fase se busca acercar el punto lo máximo posible a la frontera tecnológica, reduciendo las entradas. Con la resolución de esta fase se obtiene θ_J^* , la cual se empleará en la segunda fase. El hecho de usar el subíndice J y no j, se refiere a que se está evaluando una DMU concreta.

FASE 1:

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN} \quad \theta_J \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_J x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\
 & \theta_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Ilustración 8 - Modelo CCR-Input Fase 1

FASE 2:

$$\begin{aligned}
 & \text{MAX} \quad \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_J^* x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0
 \end{aligned}$$

Ilustración 9 - Modelo CCR-Input Fase 2

Ambos problemas coinciden en el óptimo, para dichos modelos observamos que cualquier unidad tiene como valores admisibles:

$$\begin{aligned}\theta_J^* &= 1 \\ \lambda_J &= 1 \\ \lambda_j &= 0 \quad \forall j \neq J \\ h_i^- &= h_k^+ = 0 \quad \forall i \quad \forall k\end{aligned}$$

Ilustración 10 - Valores Admisibles CCR-Input

El objetivo principal de la función es reducir el valor de θJ^* por debajo de uno, lo que indicaría una mejora en eficiencia desde el enfoque orientado a recursos. En el caso de que una DMU obtenga un valor de $\theta J^* = 1$, pero presente valores distintos de cero en las variables de holgura (ya sea de entrada o salida), la proyección de dicha unidad se desplazará de forma paralela al eje correspondiente a la holgura no nula.

Por el contrario, si una DMU tiene $\theta J^* = 1$ y todas sus holguras son nulas, se proyectará exactamente sobre sí misma, lo que indica que se trata de una unidad eficiente. A continuación, se presenta una representación gráfica de la resolución del modelo dual, mediante un ejemplo en el que se usan dos variables de entrada y una única salida.

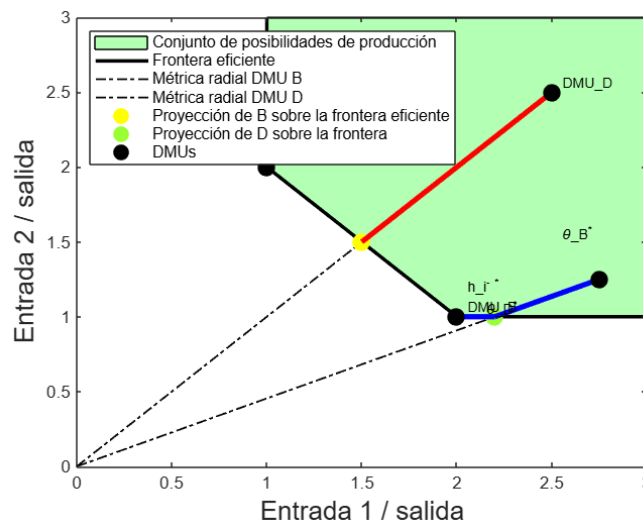


Ilustración 11 – CCR-Input

2.4.1.2 Modelo CCR-Output

Este modelo es muy similar al anterior solo que con la orientación de salida. Por lo que a ello respecta, en su versión orientada a salidas, el objetivo principal es maximizar la cantidad de productos generados por cada unidad, manteniendo constantes los recursos utilizados. Esta sería su expresión matemática:

$$\begin{aligned}
 \text{MAX} \quad & \theta_J + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = \theta_J y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\
 & \theta_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Ilustración 12 - Modelo CCR-Output

Este modelo, al igual que el anterior, consta de dos fases:

FASE 1:

$$\begin{aligned}
 \text{MAX} \quad & \theta_J \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = \theta_J y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\
 & \theta_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Ilustración 13 - Modelo CCR-Output Fase 1

FASE 2:

$$\begin{aligned}
 & \text{MAX} \quad \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = \theta_J^* y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0
 \end{aligned}$$

Ilustración 14 - Modelo CCR-Output Fase 2

Una solución siempre admisible para este problema sería:

$$\begin{aligned}
 & \theta_J^* = 1 \\
 & \lambda_J = 1 \\
 & \lambda_j = 0 \quad \forall j \neq J \\
 & h_i^- = h_k^+ = 0 \quad \forall i \quad \forall k
 \end{aligned}$$

Ilustración 15 - Valores Admisibles CCR-Output

El objetivo principal de la función en el modelo CCR-OUTPUT es maximizar la cantidad de salidas generadas manteniendo constante el nivel de recursos empleados. Esto se traduce en obtener un valor de θ_J^* igual o superior a uno, lo que indicaría una mejora en eficiencia desde el enfoque orientado a salidas.

Si una DMU alcanza un valor de $\theta_J^* = 1$ pero presenta valores positivos en las holguras (ya sean de entrada o salida), su proyección se desplazará paralelamente al eje correspondiente a la variable con holgura distinta de cero.

Por el contrario, si una DMU tiene $\theta J^* = 1$ y todas sus holguras son nulas, la proyección de dicha unidad coincidirá exactamente con ella misma, lo cual indica que la unidad es eficiente.

A continuación, se presenta una representación gráfica del modelo dual orientado a salidas, basada en un ejemplo sencillo con una entrada y dos variables de salida.

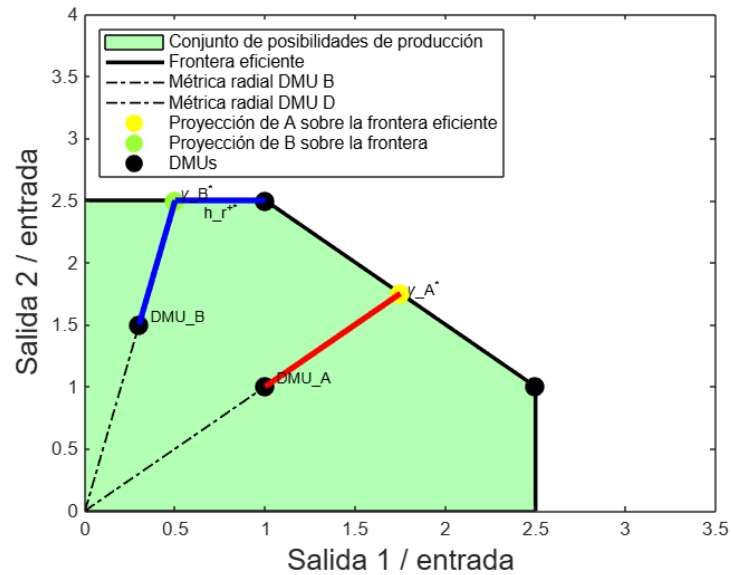


Ilustración 16 - CCR-Output

2.4.2 Modelos Radiales VRS

En esta sección se presentan los modelos DEA bajo el supuesto de retornos variables a escala, desarrollados con el objetivo de evaluar la eficiencia relativa de cada una de las unidades de decisión, considerando que no todas operan al mismo nivel de escala.

Estos modelos toman como unidad de referencia aquella que presenta la mayor productividad dentro del grupo de unidades de tamaño similar, lo que permite analizar la eficiencia sin asumir proporcionalidad entre recursos y salidas. Se van a presentar las dos versiones de este modelo, con orientación de entrada y con orientación de salida.

Una de las principales diferencias entre los modelos DEA de retornos constantes a escala y los de retornos variables a escala radica en la inclusión de una restricción adicional en estos últimos:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

Esta condición impone que la combinación de unidades de referencia utilizada para evaluar una DMU se mantenga dentro de un conjunto convexo, lo que significa que las comparaciones se realizan únicamente con otras unidades de tamaño parecido. Gracias a ello, los modelos VRS permiten reflejar de forma más realista situaciones en las que no existe proporcionalidad entre recursos y salidas, siendo especialmente útil cuando las DMUs operan a distintas escalas.

2.4.2.1. Modelo BCC-Input

El modelo BCC-INPUT, propuesto por Banker, Charnes y Cooper, surge como una extensión del modelo CCR para contemplar la posibilidad de retornos variables a escala. Desde un enfoque orientado a recursos, este modelo evalúa la eficiencia de una unidad de decisión, analizando en qué medida puede reducir el uso de sus recursos manteniendo constantes sus niveles de salida, pero comparándose únicamente con unidades operativas de similar tamaño. Como se ha explicado recientemente, la principal diferencia con el modelo CCR-Input es la restricción de la convexidad. Esta sería su expresión matemática:

$$\text{MAX } \theta_J + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_J x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

θ_J libre

Ilustración 17 - Modelo BCC-Input

Se puede apreciar como la restricción de convexidad obliga a que la proyección de la DMU se haga sobre el hiperplano formado por las DMU más eficientes, siendo esta frontera compuesta por más DMU al ser una tecnología más restrictiva.

En este modelo las unidades eficientes toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\theta_J &= 1 \\ \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &= 0 \quad \forall j \neq J \\ h_i^- &= h_k^+ = 0 \quad \forall i, \forall k\end{aligned}$$

Ilustración 18 - Valores Admisibles BCC-Input

Esta sería la representación gráfica de este modelo en el caso de una sola entrada y salida:

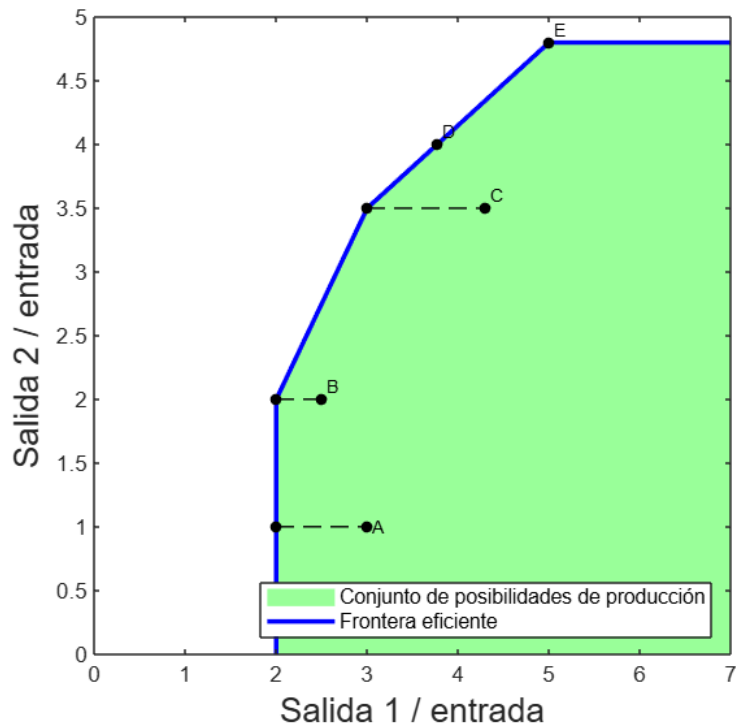


Ilustración 19 - BCC-Input

2.4.2.2. Modelo BCC-Output

Este modelo es muy parecido al anterior solo que con la orientación de salida. Por lo que a ello respecta, en su versión orientada a salidas, el objetivo principal es maximizar la cantidad de productos generados por cada unidad, manteniendo constantes los recursos utilizados. Esta sería su expresión matemática:

$$\begin{aligned}
 \text{MAX} \quad & \theta_J + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = \theta_J y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\
 & \theta_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Ilustración 20 - Modelo BCC-Output

En este modelo las unidades son eficientes si y sólo si toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 \theta_J &= 1 \\
 (h_i^-)^* &= (h_k^+)^* = 0 \quad \forall i, \forall k
 \end{aligned}$$

Ilustración 21 - Valores Admisibles BCC-Output

Esta sería la representación gráfica de este modelo en el caso de una sola entrada y salida:

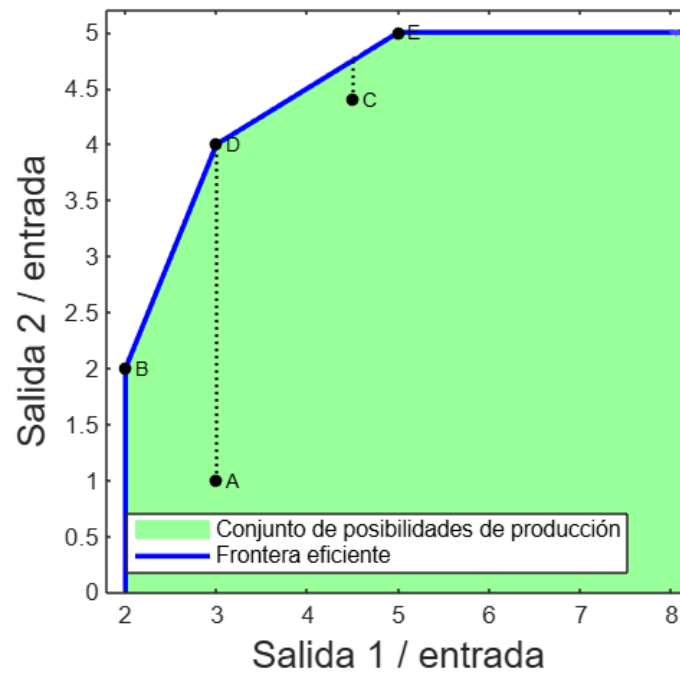


Ilustración 22 - BCC-Output

2.4.3. Modelo Aditivo No Orientado

Los modelos no orientados no se centran exclusivamente en reducir los recursos ni en aumentar las salidas, sino que buscan mejorar simultáneamente ambos temas. Este enfoque es útil cuando entradas y salidas tienen igual importancia y se busca obtener una evaluación más equilibrada de la eficiencia, sin tener que comprometer ninguno de los dos aspectos. En concreto, se va a exponer el modelo aditivo.

Este modelo aditivo opera bajo el supuesto de retornos variables a escala, pero a diferencia del modelo BCC, no utiliza proyecciones radiales, sino rectangulares. Es decir, en lugar de aplicar una reducción proporcional a todos los recursos, se permite ajustar cada uno de manera independiente. De esta manera, si se eliminan del modelo BCC las variables que representan reducciones radiales de las entradas, se obtiene una formulación que responde a este enfoque alternativo.

$$\begin{aligned}
 & \text{MAX} \quad \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{iJ} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0
 \end{aligned}$$

Ilustración 23 - Modelo Aditivo No Orientado

Aunque la frontera eficiente sea la misma tanto para el modelo BCC como para el modelo aditivo, la valoración de la eficiencia de una DMU puede cambiar entre ambos modelos, ya que el BCC usa tanto proyecciones radiales como rectangulares, mientras que el modelo aditivo se basa únicamente en proyecciones rectangulares. Por otra parte, si se pretende obtener una versión del modelo aditivo que opere bajo retornos constantes a escala, bastaría con eliminar la restricción de convexidad:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

Esta sería la representación gráfica del modelo aditivo:

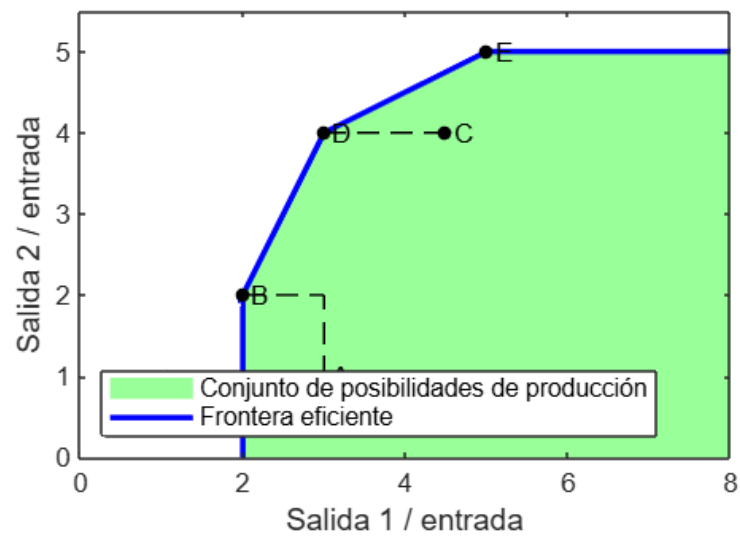


Ilustración 24 - Aditivo No Orientado

Como se puede apreciar en la ilustración, para la DMU C solo existe reducción de entrada mientras que para la DMU A, existe reducción de entrada y de salida.

2.4.4. Modelos No Radiales

Los modelos no radiales permiten analizar la eficiencia sin asumir una reducción o ampliación proporcional de todos los recursos o resultados. A diferencia de los modelos radiales, en los no radiales cada entrada o salida puede ajustarse de forma independiente, lo que ofrece una visión más detallada de las ineficiencias específicas. En esta sección se presentan las versiones orientadas a entrada y a salida, en función del enfoque de mejora elegido.

2.4.4.1. Orientación de Entrada

$$\text{MIN} \quad \left(\frac{1}{m} \right) \sum_{i=1}^m \theta_{i,J} - \varepsilon \sum_{k=1}^s h_k^+$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_{i,J} x_{i,J} \quad \forall i$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{k,J} + h_k^+ \quad \forall k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_k^+ \geq 0 \quad \forall j, \forall k$$

$$\theta_{i,J} \leq 1 \quad \forall i$$

Ilustración 25 - Modelo No Radial Orientación de Entrada

Siendo la DMU J eficiente si y sólo si $\theta^*_{i,J} = 1 \quad \forall i$ y $(h^+)_k = 0 \quad \forall k$. Las DMUs pueden mejorar su eficiencia en todas las direcciones, existiendo de esta forma, una visión más flexible de la eficiencia. Esta sería la representación gráfica de este caso:

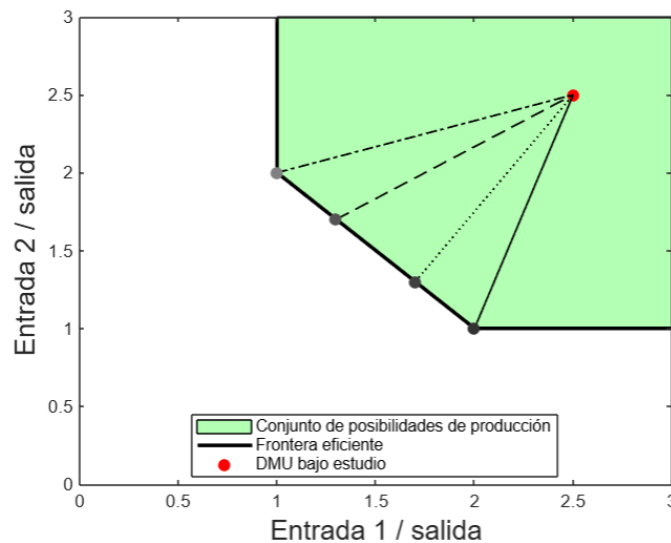


Ilustración 26 - No Radial Orientación de Entrada

2.4.4.2. Orientación de Salida

$$\begin{aligned}
 \text{MAX} \quad & \left(\frac{1}{s} \right) \sum_{k=1}^s \theta_{k,J} + \varepsilon \sum_{i=1}^m h_i^- \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{i,J} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \theta_{k,J} y_{k,J} \quad \forall k \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j, h_i^- \geq 0 \quad \forall j, \forall i \\
 & \theta_{k,J} \geq 1 \quad \forall k
 \end{aligned}$$

Ilustración 27 - Modelo No Radial Orientación de Salida

La DMU J es eficiente si y sólo si $\theta^*_{k,J} = 1 \quad \forall k$ y $(h_i^-)^* = 0 \quad \forall i$. Al igual que ocurre en la orientación no radial a entradas, en la orientación a salidas las DMUs también tienen la posibilidad de mejorar su eficiencia ajustando cada variable de forma independiente. Esto ofrece la posibilidad de obtener una visión más flexible y detallada del comportamiento de cada unidad. Esta sería la representación gráfica en este caso:



Ilustración 28 - Modelo No Radial Orientación de Salida

3 MODELOS DEA DE TIPO CENTRALIZADO

En contextos organizativos donde varias DMUs dependen de una misma entidad de gestión, resulta insuficiente analizar la eficiencia de forma aislada para cada unidad. Los modelos DEA centralizados surgen como una extensión de los enfoques tradicionales, posibilitando evaluar y optimizar el rendimiento global del sistema en su conjunto.

A diferencia de los modelos convencionales, que se centran en la eficiencia individual, los modelos centralizados introducen una perspectiva de optimización conjunta, en la que una unidad central puede intervenir en la asignación de recursos entre las distintas DMUs. Este tipo de enfoque es especialmente útil en organizaciones con estructura jerárquica, como franquicias, bancos o redes de centros educativos o sanitarios, donde una misma dirección puede redistribuir recursos o coordinar objetivos de producción para mejorar el rendimiento total.

Dentro de esta categoría, destacan los modelos orientados a minimizar el uso total de recursos, así como aquellos diseñados para maximizar los productos agregados o los ingresos globales. Además, algunos modelos incorporan el análisis de costes asociados a la reasignación, permitiendo al decisor evaluar si dicha redistribución es viable o rentable desde una perspectiva financiera.

En este trabajo se van a presentar diferentes modelos en su versión sin centralizar y en su versión centralizada para poder compararlos y estudiar sus diferencias. Posteriormente, se tratarán los modelos que se analizan en el trabajo de Fang y Li (2015) junto con unas ilustraciones prácticas que confrontarán los resultados de ambos enfoques. Estos modelos centralizados que se van a exponer en el trabajo ya fueron expuestos por Patricia Espinosa en su TFG, la diferencia es que en este TFG se avanza en esa línea de trabajo, pero considerando modelos centralizados de ingresos, que se pueden usar cuando se conocen los precios unitarios de los outputs.

3.1. Modelos Centralizados

La idea de este enfoque es proyectar simultáneamente todas las DMUs dentro de un único problema de programación lineal. La idea fundamental que lo sustenta es lograr una reducción global en el uso de recursos o, alternativamente, un aumento conjunto de la producción total, en lugar de optimizar cada unidad de forma individual. Se trata de tomar todos los pequeños problemas como uno grande global, reasignando desde el punto de vista global a los diferentes problemas pequeños, pero teniendo un control global o general de asignación de los recursos.

3.1.1 Modelo BCC-Input-Radial

En el capítulo anterior se presentó y detalló este modelo, aunque ha sufrido una modificación y se ha cambiado el subíndice J por el r . Se parte del modelo BCC-Input donde se proyectan todas las DMUs de manera individual y cuyo objetivo es minimizar la cantidad individual de entradas.

$$\begin{aligned}
 \text{MIN} \quad & \theta_r - \varepsilon \left(\sum_i h_{ir}^- + \sum_k h_{kr}^+ \right) \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} = & \theta_r x_{ir} - h_{ir}^- \quad \forall i, \forall r \\
 \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} = & y_{kr} + h_{kr}^+ \quad \forall k, \forall r \\
 \sum_j \lambda_{jr} = & 1 \quad \forall r \\
 \lambda_{jr}, h_{ir}^-, h_{kr}^+ \geq & 0 \quad \forall j, \forall i, \forall k, \forall r \\
 \theta_r \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Ilustración 29 - Modelo BCC-Input-Radial

3.1.2. Modelo BCC-Input-No Radial

En el enfoque no radial, cada entrada puede reducirse de forma independiente, permitiendo aplicar un factor de reducción distinto a cada una. El objetivo principal es minimizar la reducción ponderada del consumo total de recursos, teniendo en cuenta las preferencias o pesos asignados a cada entrada (w_i). Aunque tanto los modelos radiales como los no radiales proyectan las DMUs hacia la frontera de eficiencia técnica, el modelo radial impone una reducción proporcional de todas las entradas, mientras que el no radial permite flexibilidad en función de la importancia relativa de cada recurso.

En el caso del modelo no radial orientado a entradas, únicamente se introducen variables de holgura para las salidas, ya que las entradas se tratan de forma individual mediante los factores de reducción. Además, para evitar soluciones desequilibradas, donde algunas entradas se reduzcan excesivamente mientras otras apenas cambian, se añade la restricción $\theta_{ir} \leq 1$, garantizando esta condición que las reducciones propuestas sean razonables y equilibradas, manteniendo la coherencia del modelo.

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN} \quad \sum_i \omega_i \theta_{ir} - \varepsilon \sum_k h_{kr}^+ \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} = \theta_{ir} x_{ir} \quad \forall i, \forall r \\
 & \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} = y_{kr} + h_{kr}^+ \quad \forall k, \forall r \\
 & \sum_j \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \lambda_{jr}, h_{kr}^+ \geq 0 \quad \forall k, \forall j, \forall r \\
 & \theta_{ir} \leq 1 \quad \forall i, \forall r
 \end{aligned}$$

Ilustración 30 - Modelo BCC-Input-No Radial

3.1.3. Modelo CRA-BCC-Input-Radial

Este modelo tiene como finalidad identificar la asignación más eficiente de recursos proyectando todas las DMUs de forma conjunta sobre la frontera de eficiencia técnica. A diferencia del modelo BCC-Input-radial clásico, en el que cada unidad se evalúa de manera individual, aquí el enfoque se orienta a minimizar el consumo total de recursos del conjunto completo de DMUs, considerando el sistema como una única entidad integrada.

Se trata de una extensión del modelo BCC-Input-radial, adaptada para abordar el problema desde una perspectiva global. En lugar de analizar los valores de entradas y salidas de forma individual para cada unidad, este modelo considera la suma total de recursos o entradas y la suma total de productos generados por todas las DMUs. Como consecuencia, no se obtiene un valor de eficiencia específico para cada unidad, sino un único indicador agregado de eficiencia que refleja el rendimiento conjunto del sistema.

$$\begin{aligned}
 \text{MIN} \quad & \theta - \varepsilon \left(\sum_i h_i^- + \sum_k h_k^+ \right) \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \hat{x}_{ir} = \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i, \forall r \\
 & \hat{y}_{kr} = \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k, \forall r \\
 & \sum_r \hat{x}_{ir} = \theta \sum_r x_{ir} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_r \hat{y}_{kr} = \sum_r y_{kr} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \sum_j \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \quad \forall k, \forall i, \forall j, \forall r \\
 & \theta \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Ilustración 31 - Modelo CRA-BCC-Input-Radial

3.1.4 Modelo CRA-BCC-Input-No Radial

Este modelo es una evolución del BCC-Input-no-radial, en el que, al igual que en su versión original, se utiliza la variable w_i como coeficiente que refleja las preferencias técnicas asociadas a cada entrada. Además, comparte similitudes con el modelo CRA-BCC-Input-radial, ya que en ambos casos las DMUs son proyectadas de forma simultánea sobre la frontera de eficiencia técnica.

En cambio, a diferencia del enfoque tradicional del BCC-Input-no-radial, que evalúa de forma independiente la reducción de recursos por cada DMU, este modelo tiene como objetivo minimizar el consumo total de recursos del conjunto completo de unidades. Para ello, en lugar de trabajar con los valores individuales de entradas y salidas de cada DMU, se consideran las sumas agregadas de recursos y productos a nivel global.

Como consecuencia, el modelo no proporciona un índice de eficiencia por unidad, sino un valor específico por cada entrada, que permite identificar el potencial de mejora global del sistema. Es más, se impone la restricción de que el valor de eficiencia debe ser menor o igual a uno, con el fin de evitar resultados extremos y garantizar soluciones más equilibradas y coherentes con la lógica del modelo.

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN} \quad \sum_i \omega_i \theta_i - \varepsilon \sum_k h_k^+ \\
 & \text{s.a.} \\
 & \hat{x}_{ir} = \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i, \forall r \\
 & \hat{y}_{kr} = \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k, \forall r \\
 & \sum_r \hat{x}_{ir} = \theta_i \sum_r x_{ir} \quad \forall i \\
 & \sum_r \hat{y}_{kr} = \sum_r y_{kr} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \sum_j \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \lambda_{jr}, h_k^+ \geq 0 \quad \forall k, \forall j, \forall r \\
 & \theta_i \leq 1 \quad \forall i
 \end{aligned}$$

Ilustración 32 - Modelo CRA-BCC-Input-No Radial

3.1.5. Modelo CRAI-BCC-Input-Radial

Este modelo se basa en el CRA-BCC-Input-radial, pero introduce una modificación clave: los subíndices utilizados en la formulación pertenecen a conjuntos diferentes, siendo el subíndice j correspondiente a las DMUs eficientes (conjunto E) y el subíndice r a las DMUs ineficientes (conjunto I). De esta manera, el modelo únicamente proyecta sobre la frontera de eficiencia técnica a aquellas unidades que realmente lo necesitan, es decir, las ineficientes.

El modelo resultante, denominado CRAI-BCC-Input-radial, es una versión más restrictiva que su predecesor, ya que limita el conjunto de unidades a optimizar. Como consecuencia, el potencial de reducción global de recursos que se puede alcanzar con este enfoque será igual o inferior al obtenido con el modelo CRA-BCC-Input-radial. Sólo se proyectan las ineficientes mientras que las eficientes determinan la frontera.

Esta modificación fue propuesta por Asmild et al. (2009) con el fin de enfocar el esfuerzo de mejora únicamente en las unidades que no alcanzan la eficiencia, evitando ajustes innecesarios en aquellas que ya operan de manera óptima.

$$\begin{aligned}
 \text{MIN} \quad & \theta - \varepsilon \left(\sum_i h_i^- + \sum_k h_k^+ \right) \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \hat{x}_{ir} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i, \forall r \in I \\
 & \hat{y}_{kr} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k, \forall r \in I \\
 & \sum_{r \in I} \hat{x}_{ir} = \theta \sum_{r \in I} x_{ir} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{r \in I} \hat{y}_{kr} = \sum_{r \in I} y_{kr} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \sum_{j \in E} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \in I \\
 & \lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \quad \forall i, \forall k, \forall j \in E, \forall r \in I \\
 & \theta \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Ilustración 33 - Modelo CRAI-BCC-Input-Radial

3.1.6. Modelo CRAI-BCC-Input-No Radial

Este modelo parte del CRA-BCC-Input-no-radial y, al igual que en él, se utiliza la variable w_i como coeficiente de preferencia técnica para cada entrada. Además, guarda cierta similitud con el CRAI-BCC-Input-radial, ya que ambos comparten la idea de proyectar únicamente a las DMUs ineficientes.

La diferencia principal respecto al modelo original radica en que los subíndices j y r pertenecen a conjuntos distintos: j representa a las DMUs eficientes y r a las ineficientes. De este modo, se centra el análisis únicamente en aquellas unidades que no son eficientes, evitando modificar las que ya operan correctamente.

Al igual que ocurre con el modelo radial equivalente, esta versión es más restrictiva que el CRA-BCC-Input-no-radial, ya que reduce el margen de actuación al considerar solo una parte del conjunto de DMUs. Por tanto, el potencial de mejora global será como mucho igual, pero normalmente menor, en comparación con el modelo original.

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN} \quad \sum_i \theta_i \omega_i - \varepsilon \left(\sum_k h_k^+ \right) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \hat{x}_{ir} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall r \in I \\
 & \hat{y}_{kr} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall r \in I \\
 & \sum_{r \in I} \hat{x}_{ir} = \theta_i \sum_{r \in I} x_{ir} \quad \forall i \\
 & \sum_{r \in I} \hat{y}_{kr} = \sum_{r \in I} y_{kr} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \sum_{j \in E} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \in I \\
 & \lambda_{jr}, h_k^+ \geq 0 \quad \forall i, \forall k, \forall j \in E, \forall r \in I \\
 & \theta_i \leq 1 \quad \forall i
 \end{aligned}$$

Ilustración 34 - Modelo CRAI-BCC-Input-No Radial

3.1.7. Modelo BCC-Output-Radial

Del mismo modo que en los modelos anteriores, se ha cambiado el subíndice j por el r : R está fijado porque es para cada DMU concreta

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN} \quad \sum_i \theta_i \omega_i - \varepsilon \left(\sum_k h_k^+ \right) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \hat{x}_{ir} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall r \in I \\
 & \hat{y}_{kr} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall r \in I \\
 & \sum_{r \in I} \hat{x}_{ir} = \theta_i \sum_{r \in I} x_{ir} \quad \forall i \\
 & \sum_{r \in I} \hat{y}_{kr} = \sum_{r \in I} y_{kr} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \sum_{j \in E} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \in I \\
 & \lambda_{jr}, h_k^+ \geq 0 \quad \forall i, \forall k, \forall j \in E, \forall r \in I \\
 & \theta_i \leq 1 \quad \forall i
 \end{aligned}$$

Ilustración 35 - Modelo BCC-Output-Radial

3.1.8. Modelo BCC-Output-No Radial

En el enfoque no radial orientado a salidas, cada una de las salidas puede incrementarse de forma independiente, aplicando un factor de aumento específico representado por w_k . El propósito es maximizar el incremento ponderado de la producción total, permitiendo así una mayor flexibilidad en comparación con el modelo radial.

Tanto en los modelos radiales como en los no radiales se proyectan todas las DMUs hacia la frontera de eficiencia técnica. Sin embargo, el modelo no radial permite establecer preferencias distintas para cada salida, a través de los pesos w_k , mientras que el modelo radial impone un crecimiento proporcional en todas las salidas, sin distinguir su importancia relativa.

En este tipo de modelo, al estar enfocado en la expansión de las salidas, se incorporan únicamente variables de holgura para las entradas. Además, se impone la restricción $\gamma_{rk} \geq 1$ para evitar soluciones desequilibradas, donde algunas salidas se incrementan en exceso mientras otras apenas varían. Esta condición garantiza que los resultados sean más realistas y estables, y que se mantenga la coherencia del modelo.

$$\begin{aligned}
 \text{MAX} \quad & \sum_{k=1}^s \omega_k \theta_{kr} + \varepsilon \sum_{i=1}^m h_i^- \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_{jr} = x_{ir} - h_{ir}^- \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_{jr} = \theta_{kr} y_{kr} \quad \forall k \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \\
 & \lambda_{jr}, h_{ir}^- \geq 0 \quad \forall j, \forall i \\
 & \theta_{kr} \geq 1 \quad \forall k
 \end{aligned}$$

Ilustración 36 - Modelo BCC-Output-No Radial

3.1.9. Modelo CRA-BCC-Output-Radial

Este modelo tiene como objetivo encontrar la asignación más eficiente de recursos proyectando de forma conjunta todas las DMUs sobre la frontera de eficiencia técnica. A diferencia del modelo BCC-Output-radial clásico, que se centra en aumentar las salidas de cada unidad de forma individual, aquí el enfoque está en incrementar la producción total del conjunto de DMUs.

El modelo parte del BCC-Output-radial, pero introduce una serie de modificaciones para adaptarlo a una perspectiva global. En lugar de analizar por separado las entradas y salidas de cada unidad, se trabaja con la suma agregada de los recursos y de los productos generados por todas las DMUs. Como resultado, no se obtiene un valor de eficiencia individual para cada unidad, sino un indicador global que refleja el rendimiento conjunto del sistema.

$$\begin{aligned}
 \text{MAX} \quad & \theta + \varepsilon \left(\sum_i h_i^- + \sum_k h_k^+ \right) \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \hat{x}_{ir} = \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i, \forall r \\
 & \hat{y}_{kr} = \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k, \forall r \\
 & \sum_r \hat{x}_{ir} = \sum_r x_{ir} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_r \hat{y}_{kr} = \theta \sum_r y_{kr} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \sum_j \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \quad \forall k, \forall j, \forall r, \forall i \\
 & \theta \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Ilustración 37 - Modelo CRA-BCC-Output-Radial

3.1.10. Modelo CRA-BCC-Output-No Radial

Este modelo parte del BCC-Output-no-radial y comparte características con el CRA-BCC-Output-radial. Al igual que este último, en el enfoque no radial todas las DMUs se proyectan simultáneamente sobre la frontera de eficiencia técnica, pero con la particularidad de que el objetivo ya no es mejorar individualmente cada unidad, sino incrementar la producción total de salidas del conjunto completo de DMUs.

A partir del modelo BCC-Output-no-radial, se han introducido modificaciones clave para adaptar el análisis a una perspectiva global. En lugar de trabajar con los valores de entradas y salidas de cada unidad por separado, se consideran las sumas agregadas de insumos y productos de todas las DMUs. Como consecuencia, el modelo ya no proporciona un valor de eficiencia individual por unidad, sino un índice específico por cada salida, que representa el factor de mejora global.

Además, se impone la restricción de que estos valores deben ser mayores o iguales a uno, con el fin de evitar soluciones poco realistas donde unas salidas aumentan de forma excesiva a costa de otras. Esta condición garantiza resultados más equilibrados y coherentes dentro del modelo.

$$\begin{aligned}
 & \text{MAX} \quad \sum_k \omega_k \theta_k + \varepsilon \sum_i h_i^- \\
 & \text{s.a.} \\
 & \hat{x}_{ir} = \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i, \forall r \\
 & \hat{y}_{kr} = \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k, \forall r \\
 & \sum_r \hat{x}_{ir} = \sum_r x_{ir} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_r \hat{y}_{kr} = \theta_k \sum_r y_{kr} \quad \forall k \\
 & \sum_j \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \lambda_{jr}, h_i^- \geq 0 \quad \forall j, \forall r, \forall i \\
 & \theta_k \geq 1 \quad \forall k
 \end{aligned}$$

Ilustración 38 - Modelo CRA-BCC-Output-No Radial

3.1.11. Modelo CRAI-BCC-Output-Radial

Este modelo se basa en el CRA-BCC-Output-radial, pero introduce una diferencia importante: los subíndices j y r pertenecen a conjuntos distintos, donde j representa a las DMUs eficientes y r a las DMUs ineficientes. Esto significa que únicamente se proyectan sobre la frontera aquellas unidades que no son eficientes, dejando fuera del ajuste a las que ya operan correctamente.

Al centrarse solo en las unidades ineficientes, este modelo resulta ser más restrictivo que el CRA-BCC-Output-radial. En consecuencia, la eficiencia global obtenida será siempre mayor o igual a la que se alcanzaría utilizando el modelo original, ya que se evita modificar innecesariamente unidades que ya han demostrado un buen desempeño.

$$\begin{aligned}
 \text{MAX} \quad & \theta + \varepsilon \left(\sum_i h_i^- + \sum_k h_k^+ \right) \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \hat{x}_{ir} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall r \in I \\
 & \hat{y}_{kr} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall r \in I \\
 & \sum_{r \in I} \hat{x}_{ir} = \sum_{r \in I} x_{ir} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{r \in I} \hat{y}_{kr} = \theta \sum_{r \in I} y_{kr} + h_k^+ \quad \forall k \\
 & \sum_{j \in E} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \in I \\
 & \lambda_{jr}, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \quad \forall i, \forall k, \forall j \in E, \forall r \in I \\
 & \theta \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Ilustración 39 - Modelo CRAI-BCC-Output-Radial

3.1.12. Modelo CRAI-BCC-Output-No Radial

Este modelo parte del CRA-BCC-Output-no-radial y presenta similitudes con el CRAI-BCC-Output-radial. La principal diferencia es que los subíndices j y r se asignan a conjuntos distintos: j corresponde a las DMUs eficientes, mientras que r representa a las DMUs ineficientes. Esto implica que únicamente se proyectan sobre la frontera aquellas unidades que necesitan mejorar, dejando fuera a las que ya son eficientes.

Al igual que ocurre en el modelo CRAI-BCC-Output-radial, esta formulación es más restrictiva que la versión original CRA-BCC-Output-no-radial. Por lo tanto, la eficiencia global obtenida será siempre igual o superior, ya que se evita intervenir en unidades que ya están bien posicionadas en la frontera de eficiencia.

$$\begin{aligned}
 & \text{MAX} \quad \sum_k \theta_k \omega_k + \varepsilon \left(\sum_i h_i^- \right) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \hat{x}_{ir} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall r \in I \\
 & \hat{y}_{kr} = \sum_{j \in E} \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall r \in I \\
 & \sum_{r \in I} \hat{x}_{ir} = \sum_{r \in I} x_{ir} - h_i^- \quad \forall i \\
 & \sum_{r \in I} \hat{y}_{kr} = \theta_k \sum_{r \in I} y_{kr} \quad \forall k \\
 & \sum_{j \in E} \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \in I \\
 & \lambda_{jr}, h_i^- \geq 0 \quad \forall i, \forall j \in E, \forall r \in I \\
 & \theta_k \geq 1 \quad \forall k
 \end{aligned}$$

Ilustración 40 - Modelo CRAI-BCC-Output-No Radial

3.2. Modelos Del Artículo de Fang y Li (2015)

En esta fase del trabajo, se van a exponer los modelos desarrollados en el artículo científico de Fang y Li (2015), explicar en qué consisten y en qué forma los he reformulado acorde a la nomenclatura y patrón aprendidos en la asignatura de Métodos de Optimización, en concreto, en el bloque de Modelos DEA. Posteriormente, se mostrarán la forma en la que se han trasladado a los códigos para confrontar los resultados y comparar los modelos de los cuales consta el análisis.

3.2.1. Modelo de Eficiencia en Ingresos

El modelo de eficiencia en ingresos es una variante dentro del enfoque DEA que incorpora información económica, concretamente los precios de las salidas, con el objetivo de maximizar el valor monetario de la producción generada por una unidad. A diferencia de los modelos tradicionales orientados a entradas o salidas, donde se optimizan cantidades físicas, este modelo se centra en el valor económico total de las salidas, lo que resulta especialmente útil en contextos donde el objetivo principal de la organización es maximizar los ingresos.

Este enfoque fue desarrollado como una extensión de los modelos clásicos DEA y ha sido aplicado en diferentes sectores como el bancario, el educativo o el sanitario, donde no todas las salidas tienen la misma relevancia ni el mismo valor unitario.

En cuanto a los fundamentos del modelo, la formulación parte de un entorno de rendimientos variables a escala, como en el modelo BCC, por lo que incluye la restricción de convexidad. Sin embargo, se diferencia de los modelos convencionales en varios aspectos clave:

- ❖ Se incorporan los precios unitarios de cada salida, lo que permite evaluar no solo la cantidad producida, sino su contribución económica real.
- ❖ La función objetivo busca maximizar el ingreso total:

$$\max p^T y + \varepsilon \cdot 1^T s^-$$

Donde p es el vector de precios de las salidas, y el vector de salidas alcanzadas, y s el vector de holguras de entradas.

- ❖ El término $\varepsilon \cdot 1^T s^-$ introduce un componente lexicográfico que permite dar prioridad al valor económico de las salidas, y solo en segundo lugar considerar la mejora en la reducción de recursos no aprovechados.
- ❖ Al igual que en otros modelos DEA, se utilizan combinaciones convexas de DMUs observadas para formar la frontera eficiente, pero ahora ponderadas con un criterio económico.

En cuanto a interpretación y aplicación, el modelo proporciona una forma más realista de evaluar la eficiencia, especialmente en entornos donde las distintas salidas tienen valores económicos distintos. Por ejemplo, en una empresa que produce varios productos con diferentes precios de mercado, no tendría sentido optimizar solo en términos de unidades físicas. En cambio, el modelo de eficiencia en ingresos permite detectar si una unidad, aun siendo eficiente técnicamente, no está maximizando su valor económico por no enfocarse en los productos más rentables.

Además, este modelo resulta útil cuando se quieren tomar decisiones estratégicas, como por ejemplo qué tipo de producto conviene potenciar, o cómo redistribuir recursos para mejorar el ingreso total sin necesariamente aumentar el volumen físico de producción.

A diferencia del modelo CCR-Output, que busca simplemente aumentar la cantidad de salidas manteniendo los recursos constantes, el modelo de eficiencia en ingresos pone el foco en el valor monetario total, lo que lo convierte en una herramienta más adecuada para escenarios donde se busca rentabilidad económica.

Además, al operar bajo retornos variables a escala, permite distinguir si una DMU no solo está siendo ineficiente técnicamente, sino también si está desaprovechando oportunidades de generar ingresos a través de una combinación subóptima de salidas.

En el estudio desarrollado por Fang y Li (2015), este modelo se aplicó a una red de 20 restaurantes pertenecientes a la misma cadena. Se demostró que, aun cuando algunas DMUs eran eficientes bajo modelos convencionales, la adopción de un enfoque centralizado con maximización de ingresos permitía aumentar el valor total generado por el conjunto, especialmente cuando se permitía redistribuir los recursos entre las unidades. Esta redistribución se analiza posteriormente incluyendo un componente de coste-ingreso, que evalúa si el beneficio económico justifica los costes asociados al reajuste de recursos.

Una vez obtenida la solución del modelo de maximización de ingresos, se puede definir la eficiencia en ingresos de una determinada unidad de decisión como la relación entre el ingreso máximo alcanzable y el ingreso realmente observado por esa unidad. Este indicador permite evaluar no solo si la DMU está utilizando correctamente sus recursos, sino también si está enfocando su producción hacia las salidas más rentables, según los precios disponibles.

La expresión general para calcular esta eficiencia es:

$$\text{Eficiencia en ingresos (RE)} = \frac{\text{Ingreso máximo alcanzable}}{\text{Ingreso observado}} = \frac{p^T \hat{y}_0}{p^T y_0}$$

Donde,

- ❖ p es el vector de precios unitarios de cada salida,
- ❖ $\hat{y}_0$ representa el vector de salidas óptimas para una DMU, obtenido a partir del modelo DEA de eficiencia en ingresos,
- ❖ y_0 es el vector de salidas originalmente observado para esa unidad.
- ❖ RE: Revenue Efficiency. Normalmente se define el ratio al revés para que el valor obtenido esté entre 0 y 1, pero se ha mantenido así para tratar de mantener la consistencia con el artículo original.

El valor del índice de ineficiencia en ingresos (máximo ingreso posible / ingreso observado) será siempre mayor o igual a 1, donde un valor igual a 1 indica que la DMU está alcanzando su ingreso máximo teórico según sus recursos y los precios de mercado. En cambio, un valor superior a 1 refleja que existe una brecha de eficiencia: la unidad no está aprovechando al máximo su potencial económico y podría incrementar sus ingresos ajustando la combinación de salidas, priorizando aquellas que generan mayor valor en el mercado, sin necesidad de aumentar la cantidad total producida. Por ejemplo, un valor de 1,25 implica que la unidad solo está generando el 80 % de su ingreso potencial, lo que evidencia un 20 % de margen de mejora en la orientación de su producción hacia salidas más rentables.

Este enfoque resulta especialmente útil en situaciones donde diferentes salidas tienen distintos precios o rentabilidades, y permite identificar no solo ineficiencias técnicas, sino también decisiones estratégicas subóptimas en la asignación del esfuerzo productivo. El modelo de eficiencia en ingresos se formula como un problema de programación lineal, cuyo objetivo es maximizar el ingreso total generado por una unidad de decisión, considerando los precios conocidos de las salidas y un conjunto de DMUs observadas.

La versión orientada a salidas, bajo retornos variables a escala, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max \quad & p^T y + \varepsilon \cdot 1^T s^- \\ \text{s.a.} \quad & X\lambda + s^- = x_0 \\ & Y\lambda = y \\ & 1^T \lambda = 1 \\ & s^- \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Ilustración 41 - Modelo Original de Eficiencia en Ingresos

Donde,

- ❖ $p \in \mathbb{R}^s$: vector de precios unitarios de cada una de las salidas.
- ❖ $y \in \mathbb{R}^s$: vector de niveles de salida producidos por la DMU evaluada.
- ❖ $x_0 \in \mathbb{R}^m$: vector de niveles de entrada observados para la DMU evaluada.
- ❖ $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$: matriz de entradas de todas las DMUs.
- ❖ $Y \in \mathbb{R}^{s \times n}$: matriz de salidas de todas las DMUs.
- ❖ $\lambda \in \mathbb{R}^n$: vector de pesos o coeficientes que determinan la combinación convexa de DMUs utilizadas como referencia.
- ❖ $s- \in \mathbb{R}^m$: vector de holguras en las entradas, es decir, el exceso de recursos no aprovechados.
- ❖ ε : escalar infinitesimal (positivo pero muy pequeño), utilizado para dar prioridad lexicográfica a la maximización del ingreso
- ❖ $p^T * y$, sin ignorar completamente las holguras.
- ❖ $1^T * \lambda = 1$: restricción de convexidad, que garantiza que el punto de referencia se construye como combinación convexa de DMUs observadas (es lo que define los retornos variables a escala).

En cuanto a la interpretación del modelo:

- ❖ El modelo busca maximizar primero el valor monetario total de las salidas producidas, es decir, no se maximiza simplemente la cantidad producida, sino el ingreso total, teniendo en cuenta el valor económico de cada salida.
- ❖ La primera restricción asegura que las entradas requeridas por la combinación convexa de DMUs (más las holguras) igualan los recursos usados por la DMU evaluada.
- ❖ La segunda restricción garantiza que las salidas producidas por la DMU evaluada coinciden con la combinación de salidas de las unidades de referencia.
- ❖ La tercera restricción es lo que define que el modelo opera bajo retornos variables a escala. Si esta restricción se eliminara, el modelo pasaría a operar con retornos constantes a escala (CRS).
- ❖ Las restricciones de no negatividad garantizan que las holguras y los coeficientes de ponderación no puedan tomar valores negativos, manteniendo el modelo dentro de un marco realista.

Este modelo proporciona una evaluación más realista de la eficiencia en contextos donde no solo importa cuánto se produce, sino el valor económico de lo producido. Incluso permite detectar oportunidades de mejora que van más allá de la eficiencia técnica, orientando a las DMUs hacia decisiones estratégicas de producción más rentables. La formulación es flexible y puede adaptarse a diferentes entornos, tanto en análisis individual como en enfoques centralizados.

3.2.2. Modelo de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos

Este modelo parte de la idea de que, en organizaciones donde las unidades operan bajo una estructura jerárquica común, puede existir una entidad central responsable de gestionar y distribuir los recursos. A diferencia del enfoque clásico de DEA, que evalúa la eficiencia de cada unidad de forma individual manteniendo fijos sus recursos, este modelo propone una asignación conjunta y optimizada de los insumos disponibles con el objetivo de maximizar el ingreso total agregado del sistema.

El modelo se formula para entornos donde es posible redistribuir recursos (aunque no tiene por qué ser así, debido a las variables no discrecionales) entre las distintas unidades de decisión, permitiendo así una gestión más estratégica de los insumos en función de la capacidad de cada unidad para generar valor económico. Esta perspectiva es más adecuada cuando se desea evaluar el sistema en su conjunto y tomar decisiones globales, en lugar de centrarse en el desempeño aislado de cada unidad.

En cuanto a interpretación y aplicación, este modelo se construye sobre el principio de que no todas las unidades deben necesariamente mantener sus niveles originales de entrada. En su lugar, se busca encontrar una nueva asignación de recursos, dentro de los límites disponibles, que permita maximizar el valor total de las salidas generadas. Para ello, se proyectan simultáneamente todas las DMUs ineficientes sobre la frontera de eficiencia técnica, priorizando la combinación de salidas más rentable y minimizando, en la medida de lo posible, las holguras negativas de entrada.

Este tipo de enfoque es particularmente útil en empresas con múltiples departamentos, filiales o centros de producción, donde es el nivel central el que toma las decisiones sobre la distribución de recursos.

Los modelos DEA tradicionales (como CCR o BCC) evalúan cada DMU por separado, sin interacción entre ellas, y sus recursos son considerados fijos. Esto limita su capacidad para generar estrategias de mejora a nivel organizacional. En cambio, este modelo centralizado rompe con esa lógica individualista, permitiendo que los recursos se redistribuyan de forma óptima entre las unidades. El resultado no es una medida de eficiencia para cada unidad, sino una asignación óptima de recursos y una medida de ingreso global alcanzable, lo que lo convierte en una herramienta especialmente potente para la toma de decisiones en estructuras centralizadas.

Fang y Li (2015) aplican este modelo a un conjunto de 20 restaurantes pertenecientes a la misma cadena. Bajo un enfoque no centralizado, cada restaurante gestiona sus propios recursos y busca su eficiencia individual. Sin embargo, aplicando el modelo centralizado, se demuestra que es posible reorganizar los recursos de forma más eficiente entre los restaurantes, asignando más recursos a los que generan mayores ingresos y ajustando el uso en los que tienen menor rendimiento.

Los resultados del estudio (expuestos en el apartado de Ilustración del Modelo) muestran que la aplicación de este modelo permite aumentar significativamente el ingreso total, incluso cuando las unidades ya operaban de forma eficiente bajo un análisis individual.

El modelo se expresa como un problema de programación lineal de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } \Psi &= \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s p_{rk} y_r^k + \varepsilon \sum_{i \notin U} \sum_{k=1}^m s_{ik}^- \\
 \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} &\leq x_{ik} \quad k = 1, \dots, n; i \in U \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} + s_{ik}^- &= x_i^k \quad k = 1, \dots, n \quad ; \quad i \notin U \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj} &= y_r^k \quad k = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, s \\
 \sum_{k=1}^n x_i^k &= \sum_{k=1}^n x_{ik} \quad i = 1, \dots, m; i \notin U \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} &= 1 \quad k = 1, \dots, n \\
 \lambda_{jk} &\geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad ; \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Ilustración 42 - Modelo Original de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos

Donde,

- ❖ Ψ : función objetivo, representa el ingreso total generado por todas las DMUs más una penalización ponderada de holguras.
- ❖ p_{rk} : precio unitario de la salida r para la DMU k .
- ❖ y_r^k : cantidad de la salida r generada por la DMU k .
- ❖ x_i^k : cantidad del recurso i utilizada por la DMU k .
- ❖ λ_{jk} : coeficiente de combinación convexa que representa el peso asignado a la DMU j en la construcción de la DMU virtual para la DMU k .
- ❖ s_{ik}^- : holgura negativa del recurso i en la DMU k , que se desea minimizar.
- ❖ U : conjunto de entradas no discrecionales.
- ❖ ε : parámetro infinitesimal, utilizado para dar prioridad lexicográfica a la maximización del ingreso frente a la minimización de holguras.

En cuanto a la interpretación:

- ❖ El modelo maximiza el ingreso total generado por todas las DMUs del sistema. El término con ε actúa como segundo objetivo, minimizando el exceso de uso de recursos (holguras) para asegurar soluciones más equilibradas.
- ❖ Las dos primeras restricciones distinguen entre entradas no discrecionales (conjunto U) y entradas discrecionales. Las discrecionales pueden variar su valor, en cambio, las no discrecionales, no.
- ❖ La tercera restricción garantiza que las salidas generadas por cada DMU se obtienen como una combinación convexa de DMUs observadas.
- ❖ La cuarta restricción impone que el total de recursos asignados en el sistema no supere la cantidad global disponible.
- ❖ La quinta restricción obliga a que cada DMU virtual generada se construya como combinación convexa, permitiendo retornos variables a escala.
- ❖ La sexta restricción define las condiciones de no negatividad para los coeficientes de combinación.

El modelo de eficiencia en ingresos con reasignación centralizada representa una evolución significativa dentro del análisis DEA. Al permitir una redistribución óptima de recursos, no solo se maximizan los ingresos globales, sino que se ofrece una herramienta potente para la toma de decisiones estratégicas a nivel organizacional. Esta formulación no pretende evaluar a cada unidad por separado, sino optimizar el conjunto, lo que lo convierte en un modelo ideal para estructuras centralizadas que persiguen la eficiencia económica global más allá del rendimiento técnico individual.

3.2.3. Modelo de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación

Una vez establecido que la reasignación de recursos puede mejorar el ingreso total en un entorno centralizado, surge una nueva cuestión: ¿es rentable esa reasignación desde un punto de vista económico? Este modelo da respuesta a esta pregunta incorporando, además del ingreso total obtenido, el coste asociado a la reasignación de insumos entre las distintas unidades de decisión (DMUs). Esta formulación añade una dimensión práctica clave al problema, permitiendo al responsable central valorar la conveniencia real de ejecutar una redistribución de recursos.

Este modelo se basa en la idea de que, aunque exista una redistribución óptima de recursos que maximiza los ingresos (como la planteada en el modelo anterior), trasladar recursos de una DMU a otra implica un coste. Puede tratarse de costes logísticos, laborales, administrativos o contractuales. El modelo busca, entonces, minimizar ese coste de reasignación manteniendo el ingreso total alcanzado con la redistribución como una restricción.

Este planteamiento convierte el modelo en una herramienta de optimización dual: maximizar el ingreso y luego encontrar la forma menos costosa de implementar esa redistribución.

En cuanto a interpretación y aplicación, la principal utilidad de este modelo es que permite evaluar, de forma objetiva, si merece la pena realizar una reasignación de recursos. De esta forma, no solo se tienen en cuenta los beneficios potenciales, sino también las limitaciones reales derivadas de los costes de implementación.

Este modelo no calcula una eficiencia clásica, sino que determina la manera más económica de alcanzar la configuración de máxima eficiencia grupal obtenida en el modelo anterior.

Frente al modelo no centralizado y al modelo centralizado sin costes, este modelo añade una capa de realismo. Mientras los primeros dos modelos asumen que la redistribución no tiene consecuencias, este introduce una visión económica más completa, alineada con la realidad de muchas organizaciones.

Además, se vincula directamente con un análisis coste-beneficio, lo que lo convierte en una herramienta especialmente útil para el tomador de decisiones a nivel organizacional.

En el artículo, se aplicó este modelo a una cadena de 20 restaurantes de comida rápida, considerando la posibilidad de reasignar el recurso “horas-hombre” entre ellos. Se calcularon tanto los beneficios en ingresos como los costes de esta redistribución.

Por ejemplo, aunque el ingreso total podía aumentar con la redistribución, el modelo con costes de reasignación mostró que el coste mínimo necesario para ejecutar la reasignación superaba las ganancias obtenidas, indicando que la acción no era económicamente viable en ese caso. Esta información fue clave para determinar si implementar la reasignación era una opción rentable o no.

El modelo se expresa como un problema de programación lineal de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \Delta &= \sum_{i \notin U} \sum_{k=1}^n c_{ik}^- \gamma_{ik}^- + \sum_{i \notin U} \sum_{k=1}^n c_{ik}^+ \gamma_{ik}^+ \\
 \text{s.t.} \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} \leq x_{ik} \quad k = 1, \dots, n; \quad i \in U \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} + s_{ik}^- = x_i^k \quad k = 1, \dots, n; \quad i \notin U \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj} = y_r^k \quad k = 1, \dots, n; \quad r = 1, \dots, s \\
 &\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s p_{rk} y_r^k + \varepsilon \sum_{i \notin U} \sum_{k=1}^n s_{ik}^- = \Psi^* \\
 &\sum_{k=1}^n x_i^k = \sum_{k=1}^n x_{ik} \quad i = 1, \dots, m; \quad i \notin U \\
 &x_i^k + \gamma_{ik}^- - \gamma_{ik}^+ = x_{ik} \quad k = 1, \dots, n; \quad i \notin U \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} = 1 \quad k = 1, \dots, n \\
 &\lambda_{jk} \geq 0 \quad k = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n \\
 &\gamma_{ik}^- \geq 0 \quad k = 1, \dots, n; \quad i \notin U \\
 &\gamma_{ik}^+ \geq 0 \quad k = 1, \dots, n; \quad i \notin U
 \end{aligned}$$

Ilustración 43 - Modelo Original de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación de Recursos

Donde,

- ❖ γ_{ik}^- : cantidad reducida del recurso i en la DMU k .
- ❖ γ_{ik}^+ : cantidad añadida del recurso i en la DMU k .
- ❖ c_{ik}^- y c_{ik}^+ : coste unitario de trasladar el recurso i desde o hacia la DMU k , respectivamente.
- ❖ Ψ^* : valor óptimo de ingreso obtenido en el modelo centralizado sin costes.

(el resto de las variables son iguales que en el anterior modelo)

Sobre la interpretación,

- ❖ Función objetivo: se minimiza el coste total de redistribución, considerando tanto los movimientos de entrada como de salida de cada insumo por DMU.
- ❖ Restricciones de reasignación: se ajustan los valores de entrada de cada DMU considerando las desviaciones positivas y negativas. Se permite modificar el nivel original de recursos, pero se controla cuánto y hacia dónde.
- ❖ Restricción de conservación de recursos: el total de recursos disponibles no puede variar; simplemente se redistribuyen.
- ❖ Ingreso mínimo requerido: se impone como condición que el ingreso total del sistema, tras la reasignación, debe ser al menos igual al que se habría conseguido en el modelo centralizado. Es decir, no se sacrifica eficiencia económica en favor de un menor coste.

En conclusión, este modelo representa una evolución práctica y realista de los modelos de eficiencia basados en DEA. Al introducir el componente económico del coste de reasignación, permite evaluar si una solución teóricamente eficiente es viable y rentable en la práctica. Esta formulación es especialmente útil para gestores que buscan maximizar el rendimiento sin incurrir en costes innecesarios, y representa un enfoque integral para la toma de decisiones en entornos con múltiples unidades interrelacionadas.

4 REFORMULACIÓN DE MODELOS

A continuación, se presentan las principales diferencias entre el modelo original propuesto en el artículo de referencia y la versión reformulada que se ha desarrollado en este trabajo. La comparación se realiza punto por punto, analizando la función objetivo y cada una de las restricciones del modelo. Otro asunto relevante para evitar confusiones es que en el artículo de Fang y Li (2015) y en todo el punto 3.2.2 se usa el subíndice r para las salidas y el k para las DMUs, mientras que en la reformulación de modelos y, por tanto, todo el punto 4, se ha preferido usar el subíndice k para las salidas y el r para las DMUs.

4.1. Modelo Reformulado de Eficiencia de Ingresos

En cuanto a la función objetivo, el modelo del artículo tiene como objetivo principal maximizar los ingresos generados por las salidas, representados mediante el producto escalar entre el vector de precios p y el vector de salidas proyectadas y . Además, se introduce un término adicional que premia la posible reducción de entradas a través de la suma de holguras s^- , ponderada por un parámetro infinitesimal ϵ . En resumen, la función objetivo busca el mayor ingreso posible con el menor consumo necesario de recursos.

En lo que refiere a las restricciones, para las entradas, en el modelo del artículo, las entradas se representan mediante la restricción matricial $X \cdot \lambda + s^- = x_0$, donde x_0 es el vector de entradas de la unidad evaluada. Esta ecuación garantiza que el consumo proyectado mediante la combinación convexa de otras unidades más la posible reducción vía holgura sea igual al consumo original. Es una forma de permitir cierta flexibilidad en la eficiencia sin violar el límite de recursos disponible.

En el modelo reformulado, esta condición se descompone de forma individual por entrada, expresándose como:

$$\hat{x}_{ir} \geq \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i$$

Aunque conceptualmente sea equivalente, esta forma permite un mayor control y detalle sobre la interpretación del consumo de cada recurso, algo especialmente útil en la implementación computacional del modelo, manteniendo la lógica de buscar reducir los recursos, pero con un enfoque más enfocado en eficiencia técnica que en la reducción global. El modelo original incluía holguras de entrada que se anulaban en todas las soluciones admisibles porque las holguras sólo podían reducir las entradas, no aumentarlas, y si la suma total debía mantenerse constante, debido a la restricción de igualdad, pues si se reducían unas DMUs otras debían aumentar, pero si no podían aumentar pues tampoco se podían reducir, luego dejaba de tener sentido el hecho de haber holguras y restricciones de igualdad. De modo que en el modelo reformulado se opta por eliminar las holguras y cambiar el signo de las restricciones, relajándolas.

Para las salidas, aquí es donde aparece una de las principales diferencias entre ambos enfoques. En el modelo del artículo, la restricción es simplemente:

$$Y\lambda = y$$

Lo que implica que el vector de salidas proyectado debe ser exactamente igual a la combinación convexa de las salidas observadas en el resto de las unidades. Esto significa que no se permite, en principio, que las salidas aumenten respecto a lo que ya existe en el conjunto de referencia.

En el modelo reformulado, en cambio, se plantea la restricción de la siguiente forma:

$$\hat{y}_{kr} \leq \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k$$

Esta reformulación tiene implicaciones relevantes desde el punto de vista de la eficiencia: al permitir que las salidas proyectadas $\hat{y}_{kr}$ sean menores o iguales que la combinación convexa de salidas observadas se reconoce explícitamente que la unidad evaluada podría estar por debajo del nivel de referencia en alguna de sus salidas, lo que abre la puerta a identificar espacios claros de mejora.

Además, este planteamiento es más flexible y realista en contextos donde no es deseable o posible exigir un rendimiento igual al del conjunto de referencia, ya sea por restricciones tecnológicas, condiciones externas o simplemente por diferencias estructurales entre unidades.

Para las condiciones de convexidad y no negatividad, ambos modelos imponen las condiciones clásicas del enfoque DEA: la suma de los coeficientes λ_j debe ser igual a uno (combinación convexa) y todos los λ_j deben ser no negativos. En el modelo reformulado, estas condiciones se mantienen sin cambios, asegurando coherencia metodológica con respecto al marco DEA tradicional.

En conclusión, La diferencia clave entre ambos enfoques radica en el grado de flexibilidad que se le permite al modelo respecto a las entradas y las salidas proyectadas. El modelo del artículo impone una igualdad estricta entre las salidas estimadas y una combinación convexa de las observadas, lo que implica que no se permite mejora ni reducción respecto a lo ya existente en el conjunto de referencia. En otras palabras, fuerza a que la unidad evaluada se comporte como una réplica exacta de la frontera eficiente. En cambio, el modelo reformulado plantea una restricción más permisiva y realista, donde las salidas proyectadas pueden ser menores o iguales a dicha combinación convexa. Esto permite reflejar que algunas unidades podrían estar operando por debajo del nivel óptimo en ciertas salidas, y abre la posibilidad de analizar dichas desviaciones como oportunidades de mejora.

En definitiva, el modelo reformulado se adapta mejor a entornos donde se desea capturar ineficiencias reales sin imponer condiciones demasiado restrictivas. Además, también se diferencian a nivel de nomenclatura, ya que he tratado de adaptarlos lo máximo posible a cómo se han preparado los modelos durante la impartición de la asignatura Métodos de Optimización, en la cual se recoge este bloque de modelos DEA, en el cual se fundamenta este trabajo.

De modo que, el modelo reformulado quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \sum_k p_k \hat{y}_{kr} \\
 & \text{s.a.} \\
 & \hat{x}_{ir} \geq \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i \\
 & \hat{y}_{kr} \leq \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k \\
 & \sum_j \lambda_{jr} = 1 \\
 & \lambda_{jr} \geq 0 \quad \forall j
 \end{aligned}$$

Ilustración 44 - Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos

Donde,

- ❖ x_{ij} : cantidad del recurso i utilizada por la DMU j .
- ❖ y_{kj} : cantidad del producto k producida por la DMU j .
- ❖ $\hat{x}_{ir}$: valor proyectado del recurso i para la DMU r , obtenido como combinación convexa de otras DMUs.
- ❖ $\hat{y}_{kr}$: valor proyectado del producto k para la DMU r .
- ❖ λ_{jr} : peso asignado a la DMU j en la combinación convexa que proyecta la DMU r .

Sobre la interpretación,

- ❖ En cuanto a la función objetivo, se busca maximizar los ingresos totales generados por el conjunto de unidades. Para ello, se valora la producción de cada unidad en función de los precios asignados a cada producto.
- ❖ Para la proyección de entradas y salidas, se proyecta cada DMU a partir de combinaciones convexas del resto, construyendo así una imagen teórica de cómo debería comportarse bajo eficiencia. Estas proyecciones permiten estimar valores técnicamente óptimos para cada unidad.

4.2. Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos

En el modelo del artículo, el objetivo principal es maximizar los ingresos globales generados por las salidas del sistema, utilizando como criterio de evaluación los precios asociados a cada tipo de salida. Este planteamiento se refleja en la función objetivo:

$$\text{Max } \Psi = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s p_{rk} y_r^k + \varepsilon \sum_{i \notin U} \sum_{k=1}^m s_{ik}^-$$

El primer término representa los ingresos totales obtenidos mediante la combinación de las salidas proyectadas y_{rk} , ponderadas por los precios p_{rk} . El segundo término, ponderado por un parámetro infinitesimal ε , incorpora la suma de las holguras de entrada s_{ik}^- para las unidades no incluidas en el subconjunto U . Esta adición permite fomentar la eficiencia en el uso de los recursos al premiar soluciones que reduzcan entradas innecesarias, aunque su efecto cuantitativo en la función objetivo sea residual. En su conjunto, este modelo se orienta hacia una maximización de carácter económico, buscando aumentar los ingresos agregados del sistema bajo ciertas restricciones técnicas. Es importante recalcar que, en el cuarto sumatorio de la función objetivo, el rango es de $k = 1$ hasta m cuando en realidad es hasta n , sólo que así es cómo aparece en el modelo del artículo de Fang y Li (2015), y se ha dejado así por un tema de consistencia, pero la realidad es que es sería un error, en este caso, por parte del artículo.

Por su parte, el modelo reformulado adopta un enfoque distinto, más centrado en la evaluación de la eficiencia del sistema. La función objetivo en este caso se define como:

$$\text{Max } \Psi = \sum_k p_k \sum_r \hat{y}_{kr}$$

Aquí, $\hat{y}_{kr}$ representa las salidas proyectadas tras la reasignación centralizada. A diferencia del modelo del artículo, no se introducen penalizaciones explícitas por holguras en la función objetivo. El objetivo sigue siendo maximizar el valor económico de las salidas, pero lo hace a través de una formulación más sencilla y con una interpretación enfocada en el aprovechamiento técnico del sistema. Esta diferencia conceptual es fundamental: mientras el modelo del artículo prioriza el resultado económico, el modelo reformulado valora hasta qué punto puede optimizarse la eficiencia sin modificar la disponibilidad de recursos.

En cuanto a las restricciones relativas a las entradas, constituyen una de las principales diferencias estructurales entre ambos modelos. En el modelo del artículo, se distingue entre unidades que pertenecen al conjunto U , es decir, las que están sujetas a reasignación, y las que no. Para las primeras, se impone la siguiente restricción:

$$\sum_j z_{jk} x_{ij} \leq x_{ik} \quad \forall i \in U$$

Esto garantiza que la cantidad de recurso reasignado a la unidad i no supere su dotación inicial, lo que asegura que no haya incremento artificial en la disponibilidad de insumos. En cambio, para las unidades que no pertenecen a U , se permite una flexibilidad adicional a través de la incorporación de holguras:

$$\sum_j z_{jk} x_{ij} + s_{ik}^- = x_i^k \quad \forall i \notin U$$

Aquí, la holgura s_{ik}^- representa la cantidad de insumo que podría haberse reducido sin afectar negativamente la eficiencia. Este planteamiento introduce una dimensión de mejora, ya que se permite analizar el potencial de ahorro en recursos dentro del proceso de reasignación.

En el modelo reformulado, se utiliza una notación alternativa y más desagregada, que permite representar con mayor claridad la asignación final de recursos. Se introducen variables x_{ir} que indican la cantidad reasignada del recurso i a la unidad r . Para las entradas de unidades fuera del conjunto U , se establece que:

$$\hat{x}_{ir} \geq \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i \notin U, \forall r$$

Esto garantiza que la asignación final sea al menos igual a la combinación convexa de unidades observadas, preservando la viabilidad técnica de la producción proyectada. Además, se exige que la cantidad total reasignada de cada recurso se conserve:

$$\sum_r \hat{x}_{ir} = \sum_r x_{ir} \quad \forall i \notin U$$

Este aspecto es clave, ya que refuerza la idea de que el sistema no crea ni elimina recursos, sino que reorganiza los disponibles. Finalmente, para las unidades en U , se impone:

$$\sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \leq x_{ir} \quad \forall i \in U, \forall r$$

De esta manera, el modelo reformulado permite un análisis más detallado y flexible de la eficiencia, con restricciones que recogen explícitamente el proceso de reasignación sin violar los límites de disponibilidad.

Para las salidas, el modelo del artículo adopta una formulación conservadora. La producción proyectada para cada unidad debe corresponder a una combinación convexa exacta de las salidas observadas en otras unidades, es decir:

$$\sum_j z_{jk} y_{rj} = y_r^k \quad \forall k, r$$

Esto implica que no se permite generar más producción de la que ya está registrada en el conjunto de referencia. El sistema puede reorganizar sus recursos, pero no puede mejorar técnicamente sus resultados más allá de lo que ya se ha observado.

En cambio, el modelo reformulado introduce un grado de flexibilidad mayor. Se permite que las salidas proyectadas no superen lo que sería técnicamente posible según la combinación convexa de unidades:

$$\hat{y}_{kr} \leq \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k, r$$

De esta forma, el modelo reformulado no impone igualdad, sino que admite que una unidad produzca menos si eso contribuye a una mayor eficiencia global. Esta diferencia conceptual permite modelar sistemas que pueden mejorar su eficiencia relativa sin tener que reproducir exactamente los niveles de producción existentes.

Tanto el modelo del artículo como el modelo reformulado mantienen las condiciones clásicas del enfoque DEA en cuanto a combinaciones convexas. La diferencia fundamental entre el modelo del artículo y el modelo reformulado radica en su enfoque analítico. El modelo del artículo se orienta a la maximización de ingresos totales del sistema, bajo restricciones técnicas que aseguran la viabilidad de las reasignaciones. Al introducir penalizaciones por holguras, también incentiva la eficiencia, pero desde una perspectiva predominantemente económica.

Por el contrario, el modelo reformulado presenta una estructura más enfocada en la eficiencia del conjunto, analizando cómo puede reorganizarse el sistema sin necesidad de ampliar los recursos disponibles. Este modelo proporciona una mayor claridad en la interpretación de las restricciones y permite representar de forma más realista los posibles escenarios de mejora técnica, lo que lo hace especialmente útil en contextos de planificación operativa, política pública o gestión eficiente de recursos.

Además, desde el punto de vista didáctico, el modelo reformulado ha sido elaborado de forma coherente con la terminología y estructura utilizada en la asignatura Métodos de Optimización, lo que facilita su integración con otros modelos DEA tratados en el mismo contexto formativo.

De forma que, el modelo reformulado quedaría así:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \Psi = \sum_k p_k \sum_r \hat{y}_{kr} \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & \hat{x}_{ir} \geq \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i \notin U, \forall r \\
 & \hat{y}_{kr} \leq \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k, \forall r \\
 & \sum_r \hat{x}_{ir} = \sum_r x_{ir} \quad \forall i \notin U \\
 & \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \leq x_{ir} \quad \forall i \in U, \forall r \\
 & \sum_j \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \lambda_{jr} \geq 0 \quad \forall j, \forall r
 \end{aligned}$$

Ilustración 45 - Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos

Donde,

- ❖ x_{ij} : cantidad del recurso i utilizada por la DMU j .
- ❖ y_{kj} : cantidad del producto k producida por la DMU j .
- ❖ $\hat{x}_{ir}$: valor proyectado del recurso i asignado a la DMU r después de la reasignación.
- ❖ $\hat{y}_{kr}$: valor proyectado del producto k para la DMU r .
- ❖ λ_{jk} : peso asignado a la DMU j en la combinación convexa que proyecta la DMU k .
- ❖ p_k : precio o valor unitario generado por la DMU k .

En cuanto a la interpretación,

- ❖ Para la función objetivo, se busca maximizar los ingresos totales generados por el conjunto de unidades. Para ello, se valora la producción de cada unidad en función de los precios asignados a cada producto. Además, se introduce un término adicional que penaliza el exceso de uso de recursos que no se traduzca en eficiencia. Así, el modelo no solo busca generar más ingresos, sino hacerlo de manera equilibrada, evitando desperdicios innecesarios.
- ❖ En cuanto a la proyección de entradas y salidas, cada unidad se proyecta como una combinación convexa de otras unidades eficientes del sistema. Esto permite construir una imagen teórica de cómo debería comportarse cada DMU bajo eficiencia, estimando valores de insumos y productos técnicamente óptimos. Las proyecciones sirven de referencia para reasignar recursos entre unidades, de manera que se mantenga la coherencia con un comportamiento eficiente.
- ❖ Sobre la conservación global de recursos, el modelo garantiza que la suma total de cada insumo en el sistema no se vea alterada por la reasignación. Es decir, no se permite ni añadir ni eliminar recursos, simplemente se redistribuyen entre las unidades para maximizar el rendimiento global. Este enfoque refleja una visión centralizada, en la que se busca optimizar todo el sistema en conjunto, en lugar de mejorar cada unidad individualmente.
- ❖ En cuanto a la mejora técnica conjunta, Aunque no se introduce explícitamente un parámetro de mejora proporcional como en otros modelos, la optimización de los ingresos implica indirectamente una mejora técnica colectiva. Al reorganizar los recursos hacia unidades más productivas, se consigue un uso más eficiente del sistema. La mejora no es homogénea ni individual, sino que se manifiesta en una mejor utilización de los recursos a nivel global.
- ❖ Finalmente, para las holguras, las de entrada representan recursos asignados a una unidad que no se explican por eficiencia. Estas holguras permiten identificar posibles excesos o ineficiencias en el uso de insumos. Penalizarlas en la función objetivo ayuda a seleccionar soluciones más equilibradas, donde el uso de recursos esté plenamente justificado por la producción generada. Así, el modelo promueve asignaciones más eficientes y realistas.

Al igual que con el primer modelo, el modelo original incluía holguras de entrada que se anulaban en todas las soluciones admisibles porque las holguras sólo podían reducir las entradas, no aumentarlas, y si la suma total debía mantenerse constante, debido a la restricción de igualdad, pues si se reducían unas DMUs otras debían aumentar, pero si no podían aumentar pues tampoco se podían reducir, luego dejaba de tener sentido el hecho de haber holguras y restricciones de igualdad. De modo que en el modelo reformulado se opta por eliminar las holguras y cambiar el signo de las restricciones, relajándolas.

4.3. Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación

En cuanto a la función objetivo, tanto el modelo del artículo como el reformulado usarán la misma expresión, la cual tiene como minimizar el coste total de reasignación, cuantificado explícitamente mediante coeficientes monetarios asignados a cada unidad de recurso reubicado. La función objetivo se expresa así:

$$\min \sum_{i \notin U} \sum_r (C_{ir}^+ \gamma_{ir}^+ + C_{ir}^- \gamma_{ir}^-)$$

Los términos γ_{ir}^+ y γ_{ir}^- representan, respectivamente, el exceso y la reducción en la reasignación del recurso r para la unidad $i \notin U$, mientras que los coeficientes C_{ir}^+ y C_{ir}^- indican el coste asociado a estas variaciones. Este enfoque cuantifica directamente el esfuerzo económico que supone reorganizar recursos para mantener o mejorar los niveles de eficiencia.

De este modo, mientras el modelo del artículo busca maximizar beneficios netos considerando ligeramente las ineficiencias de reasignación, el modelo reformulado se centra en minimizar el impacto económico de dicha reasignación, manteniendo a su vez el mejor nivel de ingresos alcanzable Ψ^* , que aparece como restricción final del modelo.

En lo que respecta a las restricciones de entrada, el modelo del artículo utiliza la siguiente formulación para las unidades evaluadas y no evaluadas:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} \leq x_{ik}, \quad \forall k, \forall i \in U$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} + s_{ik}^- = x_i^k, \quad \forall k, \forall i \notin U$$

Aquí se establece un límite sobre el consumo de recursos para las unidades en evaluación, permitiendo cierta holgura para las unidades no evaluadas, que se penaliza en la función objetivo.

En el modelo reformulado, esta estructura se modifica para detallar la variación real inducida por la reasignación. Así, se introduce una expresión explícita para el nuevo nivel de recursos reasignados:

$$\hat{x}_{ir} = x_{ir} + \gamma_{ir}^+ - \gamma_{ir}^-, \quad \forall i \notin U, \forall r$$

Además, se exige que:

$$\sum_r \hat{x}_{ir} = \sum_r x_{ir}, \quad \forall i \notin U$$

Esta igualdad asegura que no haya incremento neto en el uso total de recursos para las unidades no evaluadas; simplemente se permite redistribuirlos. Esta formulación más rica permite calcular el coste real de estas modificaciones.

Para las de salida, ambos modelos comparten la siguiente restricción para las salidas proyectadas:

$$\hat{y}_{kr} \leq \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k, \forall r$$

Sin embargo, en el modelo reformulado se incorpora como parte esencial la igualdad que define el valor óptimo de ingresos alcanzable:

$$\Psi^* = \sum_k p_k \sum_r \hat{y}_{kr}$$

Lo anterior fuerza a que cualquier redistribución de recursos se evalúe respecto al máximo nivel de ingresos ya obtenido (ya que es el valor de la función objetivo en la solución del modelo anterior, siendo éste como una segunda fase del modelo precedente), garantizando así que la eficiencia productiva no se vea comprometida por las reasignaciones.

Ambos modelos imponen condiciones de convexidad clásica mediante:

$$\sum_j \lambda_{jr} = 1, \quad \forall r, \quad \lambda_{jr} \geq 0$$

Estas restricciones aseguran que las combinaciones de unidades se mantengan dentro del conjunto de producción viable (frontera DEA), respetando la lógica de envoltura convexa del enfoque.

En el modelo reformulado, además, se agregan las restricciones de no negatividad para los parámetros de reasignación:

$$\gamma_{ir}^+, \gamma_{ir}^- \geq 0, \quad \forall i \notin U, \forall r$$

Lo que impide soluciones absurdas en las que se “eliminen” recursos o se introduzcan valores negativos sin justificación.

En conclusión, la diferencia conceptual fundamental entre ambos modelos radica en su enfoque frente a la eficiencia y la redistribución de recursos. El modelo del artículo prioriza la maximización de ingresos netos incluyendo una penalización simbólica a la redistribución, lo que resulta adecuado cuando se busca aumentar la rentabilidad global sin un análisis económico detallado del coste de reorganización. Por otro lado, el modelo reformulado introduce explícitamente una estructura de minimización de costes de reasignación, permitiendo un análisis económico más riguroso y adecuado para contextos de planificación centralizada, donde la eficiencia presupuestaria y la sostenibilidad de la reorganización de recursos son críticas.

Asimismo, la reformulación se adapta mejor al enfoque didáctico adoptado en la asignatura de Métodos de Optimización, proporcionando un marco más detallado, interpretable y aplicable para el análisis DEA con condiciones de gestión realistas. Esta estructura no solo permite identificar el rendimiento potencial de las unidades, sino también evaluar el coste económico asociado a convertir dicho potencial en realidad.

De manera que, el modelo reformulado quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{i \notin U} \sum_r (C_{ir}^+ \gamma_{ir}^+ + C_{ir}^- \gamma_{ir}^-) \\
 & \quad \text{s.a.} \\
 & \hat{x}_{ir} \geq \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \quad \forall i \notin U, \forall r \\
 & \hat{y}_{kr} \leq \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \quad \forall k, \forall r \\
 & \sum_r \hat{x}_{ir} = \sum_r x_{ir} \quad \forall i \notin U \\
 & \hat{x}_{ir} = x_{ir} + \gamma_{ir}^+ - \gamma_{ir}^- \quad \forall i \notin U, \forall r \\
 & \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \leq x_{ir} \quad \forall i \in U, \forall r \\
 & \sum_j \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \Psi^* = \sum_k p_k \sum_r \hat{y}_{kr} \\
 & \lambda_{jr} \geq 0 \quad \forall j, \forall r \\
 & \gamma_{ir}^+, \gamma_{ir}^- \geq 0 \quad \forall i \notin U, \forall r
 \end{aligned}$$

Ilustración 46 - Modelo Reformulado de Eficiencia en Ingresos con Costes de
Reasignación de Recursos

Donde,

- ❖ x_{ij} : cantidad del recurso i utilizada por la DMU j .
- ❖ y_{kj} : cantidad del producto k producida por la DMU j .
- ❖ $\hat{x}_{ir}$: cantidad proyectada del recurso i que la DMU r debería utilizar tras la reasignación.
- ❖ $\hat{y}_{kr}$: cantidad proyectada del producto k que la DMU r puede producir con los insumos reasignados.
- ❖ γ_{ir}^+ : exceso de recurso i recibido por la DMU r tras la reasignación respecto al valor original.
- ❖ γ_{ir}^- : reducción de recurso i para la DMU r respecto a su valor original.
- ❖ C_{ir}^+, C_{ir}^- : costes unitarios de aumentar o reducir el recurso i para la DMU r , respectivamente.
- ❖ λ_{jr} : peso asignado a la DMU j en la combinación convexa que proyecta la DMU r .
- ❖ p_k : precio del producto k .
- ❖ Ψ^* : ingresos proyectados del sistema tras la reasignación de recursos.

En cuanto a la interpretación,

- ❖ Para la función objetivo, este modelo busca minimizar el coste total derivado de reasignar insumos entre unidades. Para ello, se consideran los costes asociados tanto al aumento como a la reducción de recursos en cada DMU. El objetivo es realizar una redistribución eficiente de los recursos, pero al menor coste posible para el sistema, priorizando asignaciones que impliquen cambios menos costosos.
- ❖ Sobre la proyección de entradas y salidas, cada unidad se proyecta utilizando combinaciones convexas de otras unidades, lo que permite estimar niveles de insumo y producción técnicamente eficientes. Esta proyección sirve como base para decidir cuántos recursos se deben reasignar y a qué unidades, buscando que todas se comporten como unidades eficientes dentro del sistema.
- ❖ En lo que a la conservación global de recursos respecta, el modelo garantiza que la suma total de cada tipo de insumo se mantenga constante tras la reasignación. De este modo, se asegura que los recursos no se creen ni se destruyan, sino que simplemente se redistribuyen entre las distintas unidades. Este enfoque promueve una eficiencia global sin necesidad de aumentar la dotación inicial de recursos.
- ❖ Para la reasignación de costes, a diferencia del modelo del artículo, aquí se permite explícitamente modificar la dotación de recursos de cada unidad, ya sea aumentando o reduciendo sus insumos. Sin embargo, cada cambio tiene un coste asociado. Estos costes dependen de cada unidad y del tipo de insumo, y son clave en la optimización, ya que se busca minimizar el impacto económico de los ajustes necesarios.
- ❖ En cuanto a los ingresos mínimos, el modelo impone una restricción que obliga a que los ingresos generados tras la reasignación no sean inferiores a un valor de referencia. De este modo, se garantiza que la solución propuesta, además de ser económicamente viable, también sea efectiva desde el punto de vista del rendimiento del sistema. Esta condición permite mantener un umbral mínimo de eficiencia.

Es importante recalcar que el segundo y tercer modelo son en realidad un mismo modelo pero desglosado en dos fases, la primera se centra en reasignar los recursos con la idea de maximizar los ingresos sin tener que invertir nada extra, sólo con una redistribución inteligente de los recursos acorde a las realidades de las diferentes DMUs, y centrándose la segunda en el análisis de la viabilidad de la inversión de esta reasignación, comparando los costes de reasignación con los beneficios obtenidos con esta reasignación de los recursos. De todos modos, se han expuesto de forma separada en el trabajo para recalcar esta dualidad de objetivos del modelo. Se puede apreciar que la estructura de la formulación del tercer modelo es la del segundo modelo, pero con las restricciones que se añaden por el tema que lo diferencia, el estudio de la viabilidad de la inversión de la reasignación de los recursos. Por eso mismo, en el análisis de los resultados, en algunos casos se obviará este tercer modelo ya que coincidirán los resultados con los del segundo.

Al igual que con el primer modelo, el modelo original incluía holguras de entrada que se anulaban en todas las soluciones admisibles porque las holguras sólo podían reducir las entradas, no aumentarlas, y si la suma total debía mantenerse constante, debido a la restricción de igualdad, pues si se reducían unas DMUs otras debían aumentar, pero si no podían aumentar pues tampoco se podían reducir, luego dejaba de tener sentido el hecho de haber holguras y restricciones de igualdad. De modo que en el modelo reformulado se opta por eliminar las holguras y cambiar el signo de las restricciones, relajándolas.

5 ILUSTRACIÓN DEL MÉTODO

5.1. Comparativa Teórica de los Modelos

En esta sección se presentan los tres modelos desarrollados para el análisis de eficiencia y redistribución de recursos mediante el enfoque DEA. Cada modelo representa una forma distinta de abordar la asignación de inputs y outputs entre las unidades de decisión, desde un enfoque individual sin intervención hasta estrategias de redistribución centralizada. El objetivo es comparar sus fundamentos, restricciones y funciones objetivo, con la idea de entender el impacto que tienen sobre la equidad, eficiencia y viabilidad práctica de los resultados obtenidos. Esta sería una tabla comparativa sobre los diferentes modelos:

Característica	Modelo de Eficiencia en Ingresos	Modelo de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos	Modelo de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación
Inputs redistribuibles	✗ No	☑ Sí	☑ Sí
Inputs no redistribuibles	☑ Sí (Conjunto U)	☑ Sí	☑ Sí
Restricción global	✗ No restricción sobre la suma total de inputs	☑ Igualdad global del total redistribuido	☑ Igualdad global con ajustes (γ^+ , γ^-)
Slack/ajustes (γ^+ , γ^-)	✗ No	✗ No	☑ Sí (variables de ajuste con coste asociado)
Objetivo	Maximizar ingreso individual por DMU	Maximizar ingreso individual bajo restricción global	Minimizar coste de redistribución bajo ingreso total óptimo
Función objetivo	$\text{Max} \quad \sum_k p_k \hat{y}_{kr}$	$\text{Max} \quad \Psi = \sum_k p_k \sum_r \hat{y}_{kr}$	$\text{Min} \quad \sum_{i \notin U} \sum_r (C_{ir}^+ \gamma_{ir}^+ + C_{ir}^- \gamma_{ir}^-)$
Equidad vs eficiencia	Máxima eficiencia individual	Equidad por redistribución	Equilibrio entre equidad y eficiencia con penalización
Aplicación típica	Análisis puro de eficiencia sin intervención	Diseño de política de reasignación centralizada	Reasignación realista con restricciones políticas o sociales

Tabla 1 - Comparación Teórica Modelos

La tabla comparativa resume las diferencias estructurales clave entre los modelos implementados. El Modelo de Eficiencia en Ingresos representa una aproximación clásica, donde no se permite redistribución de recursos, y se evalúa la eficiencia de cada DMU en función de sus propios inputs y outputs. El Modelo de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos introduce una redistribución total de los inputs "disponibles", bajo una restricción de conservación global, simulando un escenario de planificación centralizada. Finalmente, el Modelo de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación permite una redistribución parcial y flexible, penalizando las desviaciones mediante variables de ajuste, lo que lo convierte en un modelo más realista y adaptable a contextos donde la reasignación completa no es deseable o posible. Esta comparación entre modelos permite evaluar cómo cambian los resultados al introducir criterios de igualdad, intervención y coste de ajuste. Como se ha comentado anteriormente, el segundo y tercer modelo realmente son el mismo pero desglosado en dos fases, con dos objetivos distintos pero que, en realidad, se funden en uno sólo.

5.2. Ejemplos del artículo de Fang y Li (2015)

En esta sección del trabajo se van a mostrar los resultados obtenidos durante los experimentos llevados a cabo con los distintos códigos LINGO diseñados. La idea ha sido la de replicar los experimentos llevados a cabo en el artículo de Fang y Li (2015), éstos son dos, el primero con variables de entrada sólo discrecionales, es decir, aquellas cuyos valores pueden alterar, y el segundo con variables de entrada discrecionales y no discrecionales.

Como se puede observar, los targets que resultan de aplicar los modelos son diferentes de los resultados del artículo, pero coincidiendo en los resultados totales (esto se puede ver en la fila de “Suma”), de modo que se confirma que existen múltiples soluciones alternativas, como suele ocurrir en este tipo de problemas y escenarios, y que, además, los modelos reformulados propuestos funcionan bien, al dar los mismos resultados globales que en el artículo de Fang y Li (2015).

5.2.1. Ejemplo 1

En este escenario, donde tenemos dos variables de entrada y dos variables de salida, sólo ambas variables de entrada discrecionales, tanto la mano de obra como el marketing, es decir, que se puede aumentar o redistribuir los gastos en mano de obra y en marketing con idea de que esto se traduzca en un aumento global de los ingresos.

Una vez aclarada esta situación, el contexto concreto sería el siguiente: se trata de una cadena de 20 restaurantes de comida china, se pretende, modificando la distribución de los recursos relativos a la mano de obra y a los gastos en marketing (variables de entrada), aumentar los ingresos que se obtienen con las ventas de los platos de carne y de verdura (variables de salida).

Para ello, en primer lugar, se aplica el modelo sin centralizar, luego el modelo centralizado, y, por último, el modelo centralizado, pero haciendo hincapié en la reducción de costes de reasignación de estos recursos. Es decir, primero se plantea una primera fórmula de aumentar los ingresos, luego se estudia otra opción con otro enfoque distintos, el centralizado, ya explicado previamente en el desarrollo de los diferentes modelos que se plantean, y, por último, partiendo de este modelo centralizado, se estudia lo que supondría en términos de costes de reasignación esta redistribución centralizada de los recursos.

Para empezar, este es el juego de datos en este primer escenario:

Tabla 2 - Datos Iniciales Ejemplo 1

JUEGO DE DATOS					
DMU	Entradas		Salidas		Ingresos Totales
	x1	x2	y1	y2	
	Mano de obra	Marketing	Plato de carne	Plato vegetariano	
1	39	49	12	17,53	13,753
2	37	45	19	22	21,2
3	35	55	17,29	17	18,99
4	34	63,97	25	12,97	26,297
5	33	53	28	18,72	29,872
6	70	50	34	43	38,3
7	45	55,56	25	0	25
8	60	62,38	45	37,42	48,742
9	30	83,33	75	64,03	81,403
10	40	90	34	59,27	39,927
11	75	75	82	75	89,5
12	45	125	78	101,7	88,17
13	60	93,75	35	93,54	44,354
14	87	53,57	75	120	87
15	85	66,18	85	111	96,1
16	91	99	100	171	117,1
17	115,2	169	115	212	136,2
18	86,4	240	80	151	95,1
19	247	189	230	347	264,7
20	240	180	247	359	282,9
SUMA	1.554,6	1.897,74	1.441,29	2.033,18	1.644,608
PRECIOS	-	-	1	0,1	

Y este sería el resultado de aplicar el modelo tradicional de eficiencia en ingresos:

Tabla 3 - Resultados Modelo de Eficiencia Ejemplo 2

RESULTADOS MODELO EFICIENCIA EN INGRESOS					
DMU	TARGETS				Ingresos Totales
	Entradas		Salidas		
	x*1	x*2	y*1	y*2	
	Mano de obra	Marketing	Plato de carne	Plato vegetariano	
1	39,00	49,00	27,15	31,08	30,25
2	37,00	45,00	19,00	22,00	21,20
3	35,00	55,00	33,43	32,14	36,64
4	34,00	63,97	47,11	43,60	51,47
5	33,00	53,00	28,00	18,72	29,87
6	66,17	50,00	51,67	79,18	59,59
7	45,00	55,56	42,80	50,64	47,86
8	60,00	62,38	66,46	86,03	75,07
9	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
10	40,00	87,93	83,19	78,08	91,00
11	75,00	75,00	87,64	114,74	99,12
12	45,00	90,24	87,29	85,10	95,80
13	60,00	93,75	96,75	104,71	107,22
14	87,00	53,57	75,00	120,00	87,00
15	85,00	66,18	84,64	123,01	96,94
16	91,00	99,00	114,62	144,37	129,05
17	115,20	122,55	144,78	183,70	163,15
18	86,40	109,29	121,19	143,25	135,52
19	240,00	180,00	247,00	359,00	282,90
20	240,00	180,00	247,00	359,00	282,90
SUMA	1.543,77	1.674,75	1.779,71	2.242,38	2.003,95

Los cambios más importantes observados se centran en una variación de la producción de platos de carne y platos vegetarianos. Notablemente, para los restaurantes menos eficientes, como el restaurante 1, restaurante 3 y restaurante 4, se proyectan aumentos sustanciales en la cantidad de ambos tipos de platos servidos, mientras que sus inputs (mano de obra y marketing) se mantienen inalterados o experimentan reducciones marginales. Un caso particular es el restaurante 7, que originalmente no producía platos vegetarianos y ahora tiene un objetivo de producción significativo en esta categoría, indicando que la diversificación hacia este producto es clave para su eficiencia en ingresos. Por otro lado, los restaurantes que ya operan cerca de la frontera de eficiencia, como el restaurante 9, restaurante 14, restaurante 19 y restaurante 20, muestran cambios mínimos o nulos en sus inputs y outputs, sirviendo como referentes de mejores prácticas. Estos ajustes en la producción, especialmente el énfasis en la expansión de las salidas, se traducen directamente en un aumento notable y consistente en los ingresos totales proyectados para cada restaurante menos eficiente. Este incremento no solo refleja una mayor cantidad de productos vendidos, sino también una combinación óptima de la cartera de productos que maximiza el valor generado por unidad de input, demostrando el potencial de mejora en la gestión operativa para lograr una mayor prosperidad económica.

Luego, este sería el resultado al aplicar el enfoque centralizado:

Tabla 4 - Resultados Modelo con Reasignación Centralizada de Recursos Ejemplo 1

RESULTADOS MODELO EFICIENCIA EN INGRESOS CON REASIGNACIÓN CENTRALIZADA DE RECURSOS					
DMU	TARGETS				Ingresos Totales
	Entradas		Salidas		
	x*1	x*2	y*1	y*2	
	Mano de obra	Marketing	Plato de carne	Plato vegetariano	
1	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
2	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
3	240,00	180,00	247,00	359,00	282,90
4	240,00	180,00	247,00	359,00	282,90
5	142,58	135,16	167,21	222,17	189,43
6	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
7	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
8	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
9	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
10	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
11	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
12	71,02	61,91	75,00	104,31	85,43
13	87,00	53,57	75,00	120,00	87,00
14	87,00	53,57	75,00	120,00	87,00
15	87,00	53,57	75,00	120,00	87,00
16	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
17	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
18	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
19	240,00	180,00	247,00	359,00	282,90
20	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
SUMA	1.554,60	1.897,74	2.108,21	2.531,83	2.361,39

La mayoría de los restaurantes convergen hacia un mismo conjunto de inputs (30 de mano de obra, 83,33 de marketing) y outputs (75 platos de carne, 64,03 platos vegetarianos), alcanzando consistentemente 81,40 de ingresos totales. Esta homogeneidad sugiere la aplicación de un modelo que busca replicar la eficiencia de un "restaurante óptimo" de tamaño medio, haciendo que muchos establecimientos ajusten su operación a este estándar. Solo los restaurantes de mayor escala (como el 3, 4 y 19) mantienen targets de producción e ingresos significativamente más altos. En esencia, la segunda tabla promueve una eficiencia más uniforme en la industria de la restauración, donde la mayoría de los establecimientos se alinean con un modelo de éxito probado, mientras que solo los de mayor capacidad operativa pueden aspirar a escalas superiores.

Finalmente, este sería el resultado de aplicar el concepto de los costes de reasignación:

RESULTADOS MODELO EFICIENCIA EN INGRESOS CON REASIGNACIÓN CENTRALIZADA DE RECURSOS													
DMU	Objetivos				Ingresos Totales	Costes de reasignación				Reasignaciones			
	Entradas		Salidas			x1		x2		x1		x2	
	x*1	x*2	y*1	y*2		Positivo	Negativo	Positiva	Negativa	Positiva	Negativa	Positiva	Negativa
	Mano de obra	Marketing	Plato de carne	Plato vegetariano		c+	c-	gamma+	gamma-	gamma+	gamma-	gamma+	gamma-
1	39,00	78,63	75,00	72,87	82,29	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	29,63	0,00
2	37,00	79,68	75,00	70,90	82,09	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	34,68	0,00
3	35,00	85,63	79,10	71,05	86,20	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	30,63	0,00
4	34,00	85,17	78,28	69,65	85,24	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	21,20	0,00
5	33,00	84,71	77,46	68,24	84,28	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	31,71	0,00
6	70,00	67,21	78,97	105,36	89,51	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	17,21	0,00
7	45,00	75,50	75,00	78,76	82,88	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	19,94	0,00
8	60,00	97,14	99,57	106,17	110,19	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	34,76	0,00
9	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	0,00
10	40,00	87,93	83,19	78,08	91,00	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	2,07
11	75,00	75,00	87,64	114,74	99,12	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	0,00
12	52,00	93,46	93,02	94,93	102,51	0,5	0,5	0,5	0,5	7	0	0,00	31,54
13	60,00	93,75	96,75	104,71	107,22	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	0,00
14	87,00	53,57	75,00	120,00	87,00	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	0,00
15	85,00	66,18	84,64	123,01	96,94	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	0,00
16	91,00	99,00	114,62	144,37	129,05	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	0,00
17	115,20	122,55	144,78	183,70	163,15	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	46,45
18	86,40	109,29	121,19	143,25	135,52	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	130,71
19	240,00	180,00	247,00	359,00	282,90	0,5	0,5	0,5	0,5	0	7	0,00	9,00
20	240,00	180,00	247,00	359,00	282,90	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0	0,00	0,00
SUMA	1.554,60	1.897,74	2.108,21	2.531,83	2.361,39	10	10	10	10	7	7	219,76	219,76

Tabla 5 - Resultados Modelo Reasignación Centralizada con Costes de Reasignación Ejemplo 1

Los valores en gamma+ indican la cantidad de recursos orientados al marketing que ciertos restaurantes deberían incrementar para ser eficientes, como en el caso del restaurante 1 (29,63) o el restaurante 2 (34,68). Esto sugiere que, para maximizar sus ingresos o alcanzar los targets deseados, estos establecimientos requieren una expansión dentro de su abanico publicitario. Por otro lado, los valores en gamma- señalan la cantidad de recursos destinados al marketing que otros restaurantes deberían reducir para operar eficientemente. Ejemplos claros son el restaurante 11 (31,54), restaurante 18 (46,45) o restaurante 19 (130,71), lo que implica que están gastando demasiado en marketing, lo cual no se está traduciendo en una mayor eficiencia de ingresos. La presencia de valores positivos y negativos distribuidos entre los restaurantes subraya la diversidad de situaciones, desde la necesidad de expansión hasta la imperativa de una contracción de recursos para optimizar la operación y alcanzar los objetivos de eficiencia definidos por el modelo. En cuanto al análisis de la viabilidad de la inversión, el coste de reasignación de los recursos sería de 219,76 (suma de gamma+) *0,5(precio de coste de reasignación+) 219,76(suma de gamma-) *0,5(precio de coste de reasignación-) =219,76 lo cual es menor del ingreso o beneficio de aplicar esta metodología centralizada ya que con este enfoque se obtienen (2361,39-2003,95) 357,44 ingresos más, de forma que sí es rentable en términos económicos. La suma total idéntica de 219,76 en ambas columnas sugiere que el modelo busca una redistribución global de este recurso, reasignando el excedente de algunos para cubrir las necesidades de otros.

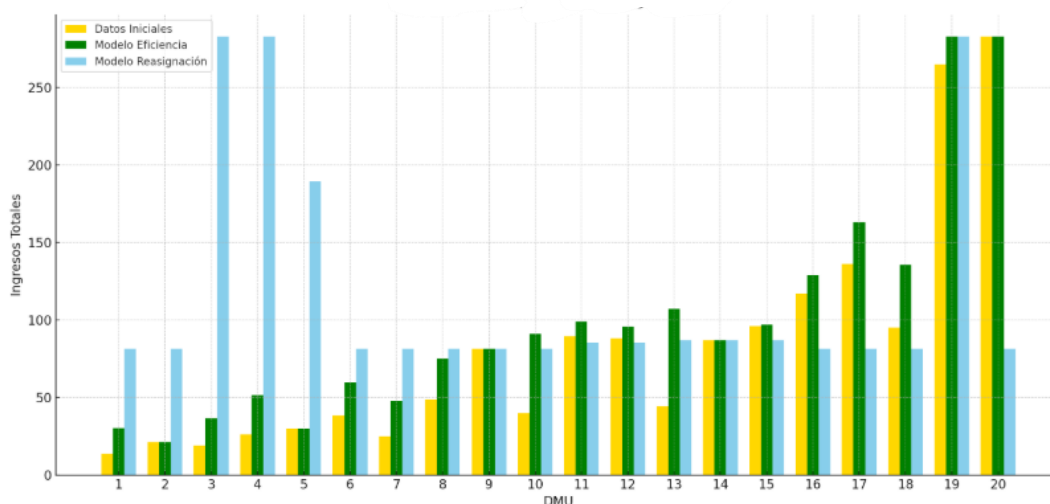
Y estos serían los resultados del modelo aplicado en el artículo de Fang y Li (2015):

Tabla 6 - Resultados Artículo Fang y Li (2015) Ejemplo 1

RESULTADOS ARTÍCULO FANG Y LI (2015)					
DMU	TARGETS				Ingresos Totales
	Entradas		Salidas		
	x*1	x*2	y*1	y*2	
	Mano de obra	Superficie del local	Plato de carne	Plato vegetariano	
1	39,00	78,63	75,00	72,87	82,29
2	37,00	84,47	79,33	73,14	86,64
3	35,00	85,63	79,09	71,05	86,20
4	34,00	85,17	78,28	69,65	85,25
5	33,00	84,71	77,46	68,24	84,28
6	70,00	101,74	107,76	120,21	119,78
7	45,00	90,24	87,28	85,10	95,79
8	60,00	97,14	99,57	106,17	110,19
9	30,00	83,33	75,00	64,03	81,40
10	40,00	78,11	75,00	73,85	82,39
11	75,00	104,04	11,86	127,24	24,58
12	45,00	90,24	87,29	85,10	95,80
13	219,40	162,98	223,84	326,82	256,52
14	87,00	53,57	75,00	120,00	87,00
15	85,00	108,65	120,05	141,28	134,18
16	91,00	99,00	114,62	144,37	129,06
17	115,20	122,55	144,78	183,70	163,15
18	87,00	53,57	75,00	120,00	87,00
19	87,00	53,57	75,00	120,00	87,00
20	240,00	180,00	247,00	359,00	282,90
SUMA	1.554,6	1.897,34	2.008,21	2.531,82	2.261,392

La evolución de los recursos de la mano de obra de los 20 restaurantes (DMUs) al aplicar los tres modelos se pueden apreciar con las siguientes gráficas:

Ilustración 47 - Comparación Ingresos Ejemplo 1



Esta podría ser otra forma de representar los mismos datos, pero de una forma más visual:

Modelo 1: Modelo Eficiencia Ingresos

Modelo 2: Modelo con Reasignación Centralizada de Recursos

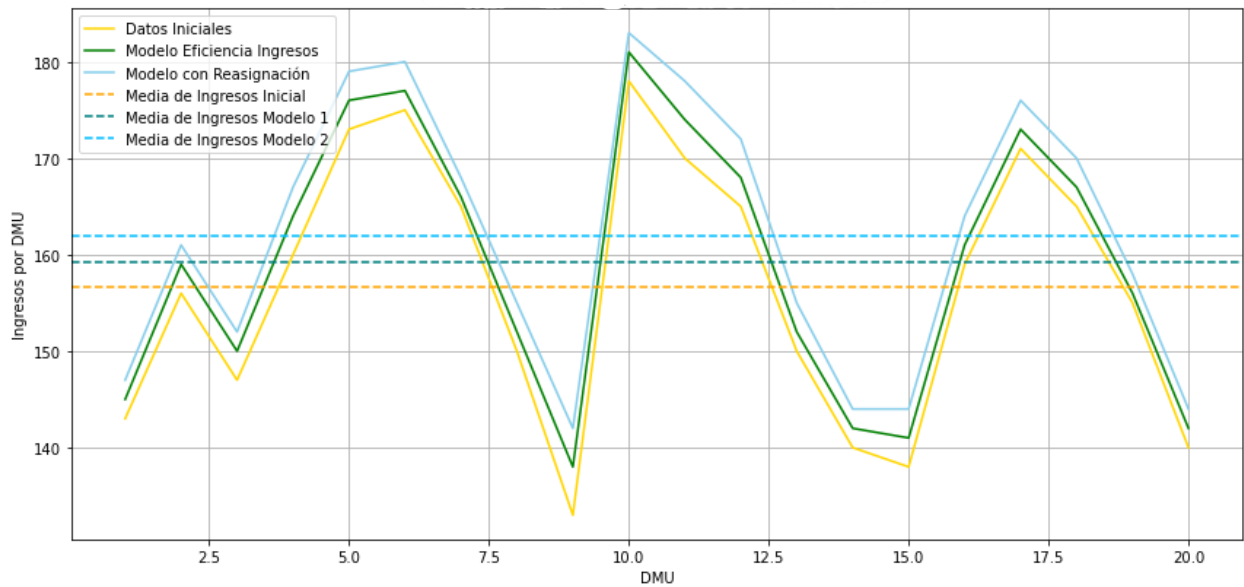


Ilustración 48 – Comparación Ingresos Ejemplo 1

Estas eran representaciones a nivel global pero también se puede ver el análisis variable por variable, estudiando la evolución de los targets para cada escenario:

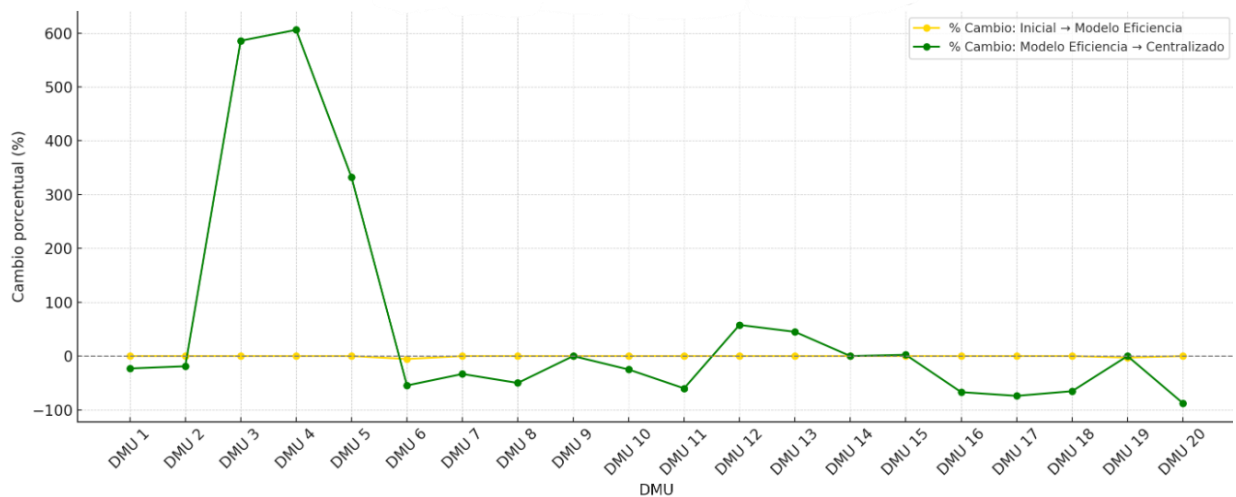


Ilustración 49 - Cambio Porcentual X1 Ejemplo 1

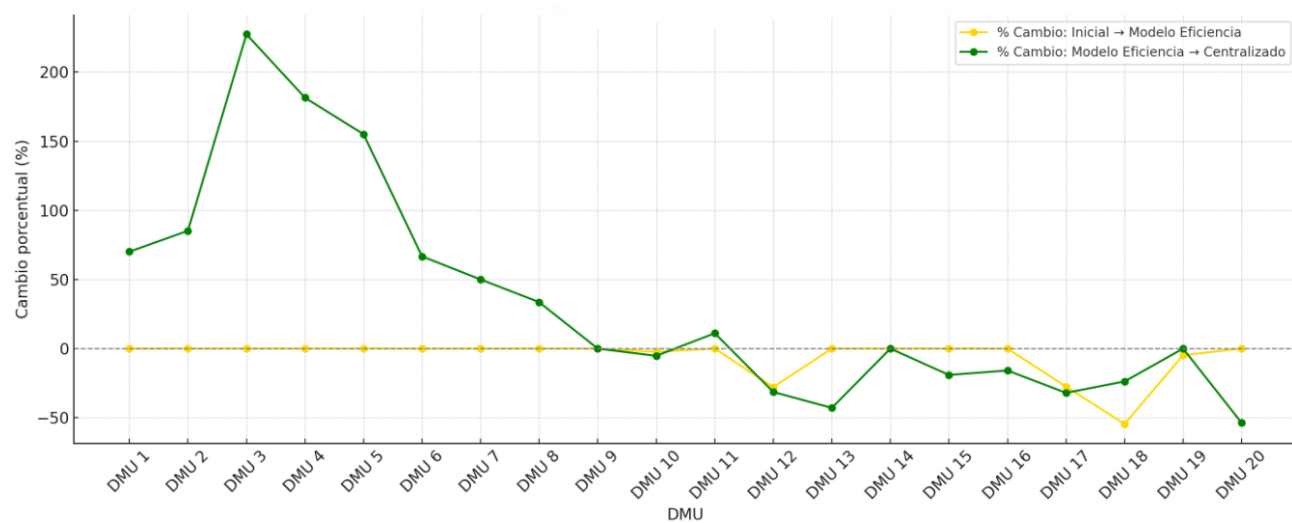


Ilustración 51 - Cambio Porcentual X2 Ejemplo 1

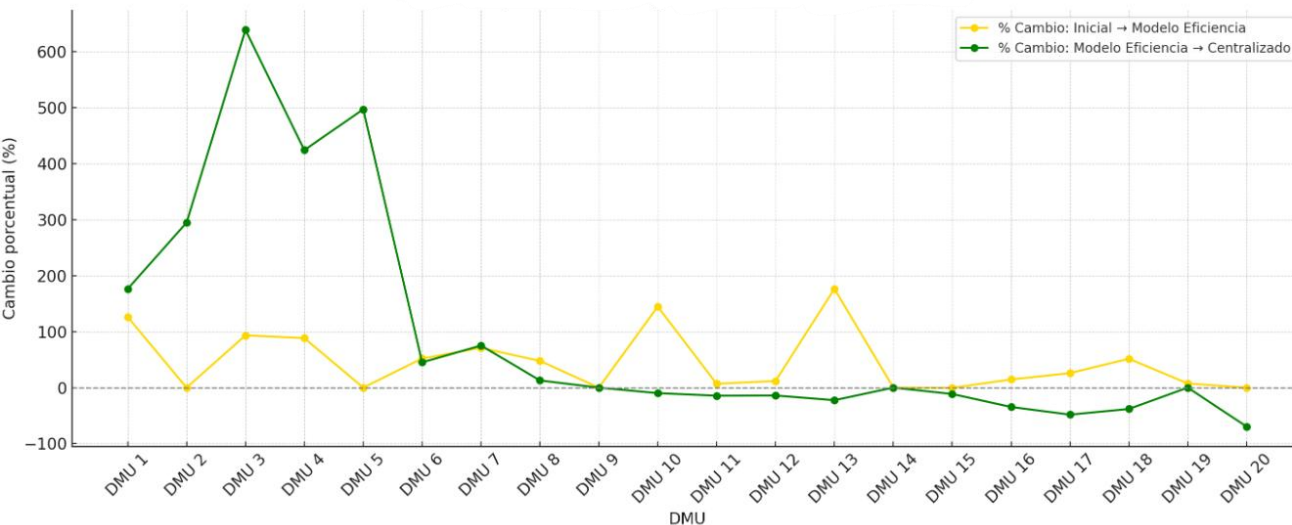


Ilustración 50 - Cambio Porcentual Y1 Ejemplo 1

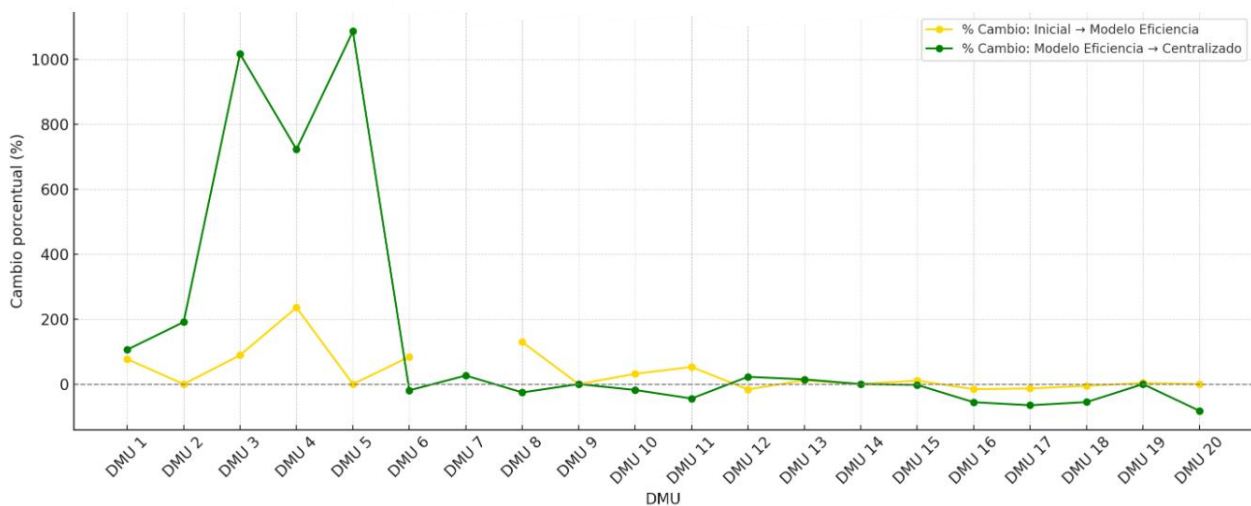


Ilustración 52 - Cambio Porcentual Y2 Ejemplo 1

El primer tramo de cada curva representa la transición desde los valores originales hasta la asignación propuesta por el modelo de eficiencia técnica individual. Esta etapa, propia del enfoque DEA clásico, ajusta las unidades ineficientes hacia la frontera sin modificar la asignación de aquellas ya eficientes. El segundo tramo, en cambio, refleja el impacto del modelo centralizado sobre esa eficiencia previa: una lógica más global que reinterpreta la distribución desde un enfoque colectivo. En general, las variables de entrada (x_1 y x_2) presentan una evolución bastante estable, con ajustes ínfimos en la mayoría de los DMU y sólo algunas reasignaciones más visibles en el paso al modelo centralizado. Sin embargo, las variables de salida (y_1 y y_2) muestran un comportamiento mucho más volátil. Por ejemplo, en la variable y_1 , el DMU 2 apenas sufre modificaciones en la etapa de eficiencia, pero con el modelo centralizado recibe un ligero descenso, indicativo de una reasignación para favorecer a otras unidades más productivas. En contraste, en la variable x_1 , el DMU 20 experimenta un incremento porcentual superior al 50 % al pasar del modelo de eficiencia al centralizado, lo que sugiere que, dentro de una estrategia global, esta DMU resulta clave y se le asignan más recursos para maximizar el output total. Esta dinámica es característica del modelo centralizado: actúa como un mecanismo redistributivo, que no se limita a corregir ineficiencias individuales, sino que redefine la asignación completa con el objetivo de maximizar el rendimiento del conjunto, aunque eso implique alterar significativamente algunas unidades.

Estas serían las gráficas a nivel de análisis por DMU, sólo algunas de las más relevantes (el resto están en el anexo) (no se muestran los valores del modelo centralizado con atención a los costes de reasignación ya que lo que se pretende ilustrar, es, fundamentalmente, el beneficio de aplicar el enfoque centralizado, estudiando posteriormente los costes de reasignación a la hora de estudiar la viabilidad económica de la estrategia:

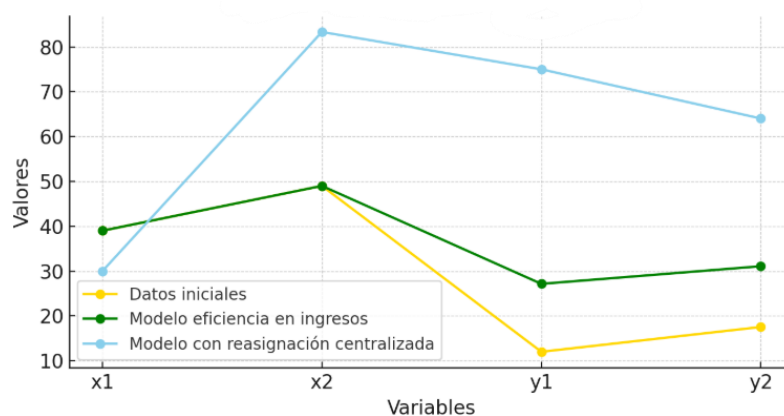


Ilustración 53 - Análisis DMU 1 Ejemplo 1

Esta DMU muestra una evolución clara hacia la eficiencia. Los outputs (y_1 , y_2) aumentan notablemente al pasar del modelo inicial al de eficiencia, lo que es típico en DEA: se maximizan los resultados sin aumentar los inputs.

Posteriormente, en el modelo centralizado, se incrementan aún más, lo que sugiere que esta unidad es priorizada por su alto potencial de rendimiento global.

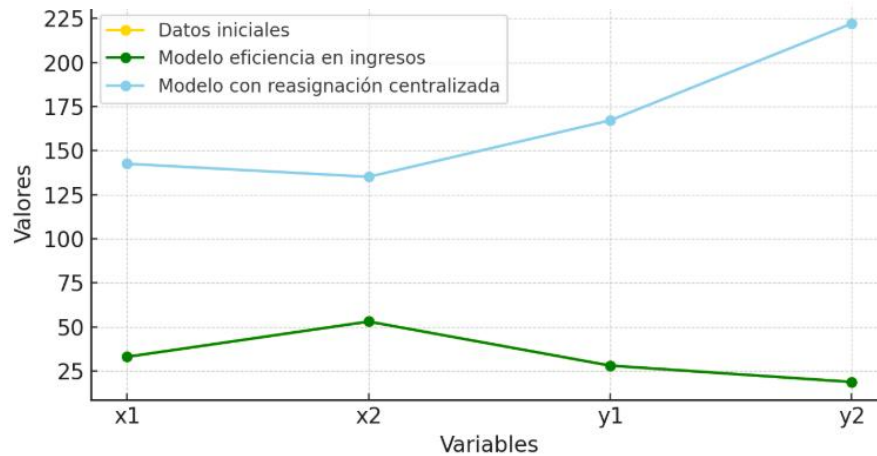


Ilustración 54 - Análisis DMU 5 Ejemplo 1

Apenas se aprecian mejoras en la etapa de eficiencia, pero el modelo centralizado introduce cambios sustanciales en todas las variables. Se interpreta como una unidad con bajo rendimiento individual pero útil en un enfoque colectivo, que recibe más inputs para producir más.

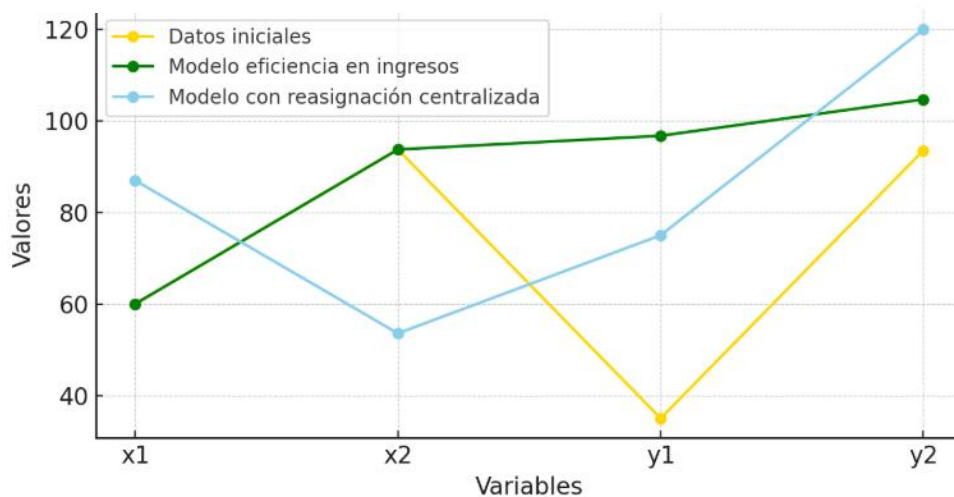


Ilustración 55 - Análisis DMU 13 Ejemplo 1

Evoluciona progresivamente en ambos modelos. Es un caso que se adapta bien al modelo DEA, pero además mantiene un buen desempeño bajo la redistribución centralizada, siendo un DMU versátil.

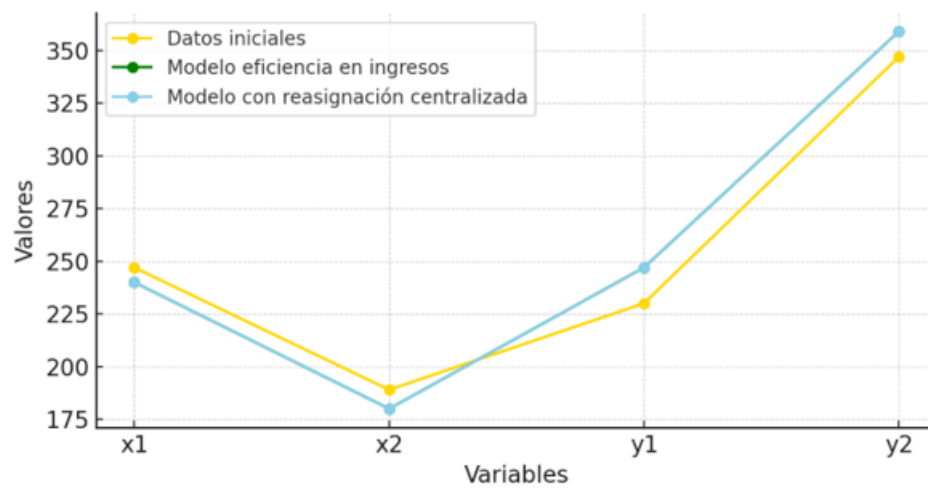


Ilustración 56 - Análisis DMU 19 Ejemplo 1

El DMU 19 mantiene una trayectoria ascendente, con mejoras sostenidas en cada modelo. Esto sugiere una alta capacidad de absorción de recursos y un buen desempeño incluso en estrategias centralizadas.

5.2.2. Ejemplo 2

En este escenario, donde tenemos dos variables de entrada y cinco variables de salida, sólo una de las dos variables de entrada es discrecional, en concreto, la mano de obra, de forma que va a ser la única variable cuyos recursos se van a poder verse incrementados con el objetivo de aumentar los ingresos globales. En cambio, la variable de la superficie del local no se puede incrementar ya que aumentar el tamaño del local supondría una dificultad irreal e imposible de llevar a cabo, de modo que se considera variable no discrecional.

Una vez aclarada esta situación, el contexto concreto sería el siguiente: se trata de una cadena de 20 restaurantes de comida china, se pretende, modificando la distribución de los recursos relativos a la mano de obra (variable de entrada), aumentar los ingresos que se obtienen con las ventas de los platos de carne, de verdura, de fideos, de sopa y las bebidas (variables de salida).

Para ello, en primer lugar, se aplica el modelo sin centralizar, luego el modelo centralizado, y, por último, el modelo centralizado, pero haciendo hincapié en la reducción de costes de reasignación de estos recursos. Es decir, primero se plantea una primera fórmula de aumentar los ingresos, luego se estudia otra opción con otro enfoque distintos, el centralizado, ya explicado previamente en el desarrollo de los diferentes modelos que se plantean, y, por último, partiendo de este modelo centralizado, se estudia lo que supondría en términos de costes de reasignación esta redistribución centralizada de los recursos.

Para empezar, este es el juego de datos en este segundo escenario:

Tabla 7 - Datos Iniciales Ejemplo 2

DATOS INICIALES								
DMU	x1	x2	y1	y2	y3	y4	y5	ingresos totales
1	3,2	2	2,24	2,46	1,22	3,12	0,96	142,38
2	3,4	2,1	2,12	2,52	1,34	3,08	0,88	140,16
3	3,1	1,8	2,08	2,25	1,05	2,85	0,74	130,13
4	3,8	2,2	2,45	2,1	1,3	2,96	0,79	143,03
5	4,2	2,6	2,8	2,78	1,42	3,48	1,05	169,53
6	4,1	2,5	2,65	2,95	1,38	3,25	0,98	165,29
7	3,8	2,3	2,6	2,24	1,15	3,18	0,95	150,23
8	3,8	2,2	2,5	2,15	1,1	3,2	0,82	144,91
9	2,9	1,6	2,1	2,04	0,98	2,88	0,72	127,04
10	4,2	2,8	2,9	2,85	1,52	3,36	1,12	174,27
11	3,4	2,1	2,6	2,45	1,36	3,32	0,82	155,93
12	4	2,4	2,78	2,66	1,18	3,15	0,98	162,5
13	3,8	2,6	2,84	2,38	1,25	3,29	0,85	161,37
14	3,4	1,9	2,33	2,2	1,06	2,99	0,82	138,56
15	2,8	1,6	2	2,18	1,96	2,84	0,71	135,47
16	3,5	2,2	2,4	2,25	1,26	2,93	0,74	142,95
17	4,2	2,5	2,68	2,5	1,46	3,22	0,92	159,94
18	3,3	1,8	2,05	2,2	1,12	3,02	0,78	130,26
19	3,6	1,9	2	2,16	1,02	2,89	0,74	126,16
20	3,1	1,7	2,05	2,12	0,94	2,9	0,68	126,24
precios			32	15	10	6	3	2.926,35
								TOTAL

Y este sería el resultado de aplicar el modelo tradicional de eficiencia en ingresos:

Tabla 8 - Resultados Modelo Eficiencia Ejemplo 2

MODELO DE EFICIENCIA								
DMU	x1	x2	y1	y2	y3	y4	y5	ingresos totales
1	3,2	2	2,4	2,36	1,56	3,16	0,78333333	149,11
2	3,4	2,1	2,6	2,45	1,36	3,32	0,82	155,93
3	3,04	1,8	2,24	2,288	1,72	3,032	0,754	143,654
4	3,56	2,2	2,64	2,516	1,372	3,352	0,866	158,65
5	4,2	2,6	2,8	2,78	1,42	3,48	1,05	169,53
6	4,04	2,5	2,76	2,714	1,408	3,448	1,004	166,81
7	3,72	2,3	2,68	2,582	1,384	3,384	0,912	161,37
8	3,56	2,2	2,64	2,516	1,372	3,352	0,866	158,65
9	2,8	1,6	2	2,18	1,96	2,84	0,71	135,47
10	4,2	2,8	2,9	2,85	1,52	3,36	1,12	174,27
11	3,4	2,1	2,6	2,45	1,36	3,32	0,82	155,93
12	3,88	2,4	2,72	2,648	1,396	3,416	0,958	164,09
13	3,8	2,6	2,75	2,65	1,44	3,34	0,97	165,1
14	3,16	1,9	2,36	2,342	1,6	3,128	0,776	147,746
15	2,8	1,6	2	2,18	1,96	2,84	0,71	135,47
16	3,5	2,2	2,6375	2,5	1,38	3,325	0,8575	158,2225
17	4,04	2,5	2,76	2,714	1,408	3,448	1,004	166,81
18	3,04	1,8	2,24	2,288	1,72	3,032	0,754	143,654
19	3,16	1,9	2,36	2,342	1,6	3,128	0,776	147,746
20	2,92	1,7	2,12	2,234	1,84	2,936	0,732	139,562
Suma	69,42	42,8	50,21	49,58	30,78	64,64	17,24	3.097,77
precios			32	15	10	6	3	TOTAL

El cambio más significativo es el incremento generalizado en los ingresos totales proyectados, debiéndose al aumento en la producción de los diferentes platos (variables de salida), reflejo directo del objetivo de eficiencia. Por ejemplo, el restaurante 1 debe aumentar su producción en casi todas las categorías, como la sopa (de 1,22 a 1,56) y fideos (de 3,12 a 3,16), aunque pueda haber ligeras reducciones en otros productos si la mezcla total resulta más rentable. Otro ejemplo claro es el restaurante 3, que, manteniendo sus inputs estables (mano de obra en 3,1 y superficie del local en 1,8, con un leve ajuste a 3,04 y 1,8 respectivamente), proyecta aumentos en la mayoría de sus salidas para disparar sus ingresos de 130,13 a 143,65. Asimismo, el restaurante 18 muestra un patrón similar, con pequeños ajustes en inputs (mano de obra de 3,3 a 3,04; Superficie de 1,8 a 1,8) pero incrementos en sus salidas para aumentar sus ingresos de 130,26 a 143,65. Casos como el restaurante 5 y el restaurante 10, que, al mantener la mayoría de sus inputs y outputs casi idénticos a los actuales, ya operan eficientemente y sirven como referentes. Estos ajustes, que pueden implicar tanto aumentos como sutiles redefiniciones en el mix de productos, buscan optimizar la combinación más rentable para cada restaurante, maximizando así los ingresos sin necesariamente requerir grandes variaciones en las entradas de mano de obra y superficie del local.

Luego, este sería el resultado al aplicar el enfoque centralizado:

Tabla 9 - Resultados Modelo Reasignación Centralizada Ejemplo 2

MODELO CENTRALIZADO								
DMU	x1	x2	y1	y2	y3	y4	y5	ingresos totales
1	3,28	2	2,48	2,396	1,48	3,224	0,798	151,838
2	3,4	2,1	2,6	2,45	1,36	3,32	0,82	155,93
3	3,04	1,8	2,24	2,288	1,72	3,032	0,754	143,654
4	3,56	2,2	2,64	2,516	1,372	3,352	0,866	158,65
5	4,2	2,6	2,8	2,78	1,42	3,48	1,05	169,53
6	4,04	2,5	2,76	2,714	1,408	3,448	1,004	166,81
7	3,72	2,3	2,68	2,582	1,384	3,384	0,912	161,37
8	3,56	2,2	2,64	2,516	1,372	3,352	0,866	158,65
9	2,8	1,6	2	2,18	1,96	2,84	0,71	135,47
10	4,2	2,8	2,9	2,85	1,52	3,36	1,12	174,27
11	3,4	2,1	2,6	2,45	1,36	3,32	0,82	155,93
12	3,88	2,4	2,72	2,648	1,396	3,416	0,958	164,09
13	4,2	2,6	2,8	2,78	1,42	3,48	1,05	169,53
14	3,16	1,9	2,36	2,342	1,6	3,128	0,776	147,746
15	2,8	1,6	2	2,18	1,96	2,84	0,71	135,47
16	3,56	2,2	2,64	2,516	1,372	3,352	0,866	158,65
17	4,04	2,5	2,76	2,714	1,408	3,448	1,004	166,81
18	3,04	1,8	2,24	2,288	1,72	3,032	0,754	143,654
19	3,16	1,9	2,36	2,342	1,6	3,128	0,776	147,746
20	4,56	1,7	2,12	2,234	1,84	2,936	0,732	139,562
Suma	71,6	42,8	50,34	49,77	30,67	64,87	17,35	3.105,36
precios			32	15	10	6	3	TOTAL
costes de reasignación	1	1						

Los ingresos totales se maximizan, siendo consistentemente iguales o ligeramente superiores a los targets previos. La clave reside en los ajustes más dinámicos de mano de obra y superficie del local, reflejo de una distribución óptima entre restaurantes. Por ejemplo, el restaurante 1 logra un pequeño incremento en sus ingresos (de 149,11 a 151,838) mediante una sutil variación en sus inputs. En contraste, el restaurante 20 es un caso claro de reasignación, donde un aumento notable en su mano de obra (de 3,1 a 4,56) le permite un salto significativo en sus ingresos (de 126,24 a 139,562), probablemente gracias a recursos cedidos por otros. Los restaurantes ya eficientes, como el restaurante 5 y el restaurante 10, mantienen sus valores casi inalterados, confirmando su robustez. En síntesis, esta última fase del análisis demuestra cómo la gestión centralizada de recursos permite no solo que cada restaurante alcance su eficiencia máxima, sino que el sistema global opere de forma aún más productiva, superando los resultados obtenidos por la optimización individual.

Finalmente, este sería el resultado de aplicar el concepto de los costes de reasignación:

En este caso, los resultados son exactamente los mismos que los del artículo de Fang y Li(2015).

MODELO CENTRALIZADO										Costes de reasignación		Reasignaciones	
DMU	x1	x2	y1	y2	y3	y4	y5	ingresos totales		Positivo c+	Negativo c-	Positiva gamma+	Negativa gamma-
1	3,28	2,00	2,48	2,40	1,48	3,22	0,80	151,84		1		0,08	0
2	3,40	2,10	2,60	2,45	1,36	3,32	0,82	155,93		1		0	0
3	3,04	1,80	2,24	2,29	1,72	3,03	0,75	143,65		1		0	0,06
4	3,56	2,20	2,64	2,52	1,37	3,35	0,87	158,65		1		0	0,24
5	4,20	2,60	2,80	2,78	1,42	3,48	1,05	169,53		1		0	0
6	4,04	2,50	2,76	2,71	1,41	3,45	1,00	166,81		1		0	0,06
7	3,72	2,30	2,68	2,58	1,38	3,38	0,91	161,37		1		0	0,08
8	3,56	2,20	2,64	2,52	1,37	3,35	0,87	158,65		1		0	0,1
9	2,80	1,60	2,00	2,18	1,96	2,84	0,71	135,47		1		0	0
10	4,20	2,80	2,90	2,85	1,52	3,36	1,12	174,27		1		0	0
11	3,40	2,10	2,60	2,45	1,36	3,32	0,82	155,93		1		0	0
12	3,88	2,40	2,72	2,65	1,40	3,42	0,96	164,09		1		0	0
13	4,20	2,60	2,80	2,78	1,42	3,48	1,05	169,53		1		0,4	0
14	3,16	1,90	2,36	2,34	1,60	3,13	0,78	147,75		1		0	0
15	2,80	1,60	2,00	2,18	1,96	2,84	0,71	135,47		1		0	0
16	3,56	2,20	2,64	2,52	1,37	3,35	0,87	158,65		1		0,06	0
17	4,04	2,50	2,76	2,71	1,41	3,45	1,00	166,81		1		0	0
18	3,04	1,80	2,24	2,29	1,72	3,03	0,75	143,65		1		0	0
19	3,16	1,90	2,36	2,34	1,60	3,13	0,78	147,75		1		0	0
20	4,56	1,70	2,12	2,23	1,84	2,94	0,73	139,56		1		0	0
Suma	71,6	42,8	50,34	49,77	30,67	64,87	17,35	3.105,36		20		0,54	0,54
precios			32	15	10	6	3	TOTAL					
costes de reasignación	1	1											

Tabla 10 - Resultados Modelo Reasignación con Costes de Asignación de Recursos Ejemplo 2

Las reasignaciones positivas (gamma+) indican la mano de obra adicional requerida, como en el restaurante 1 (0,08) o el restaurante 14 (0,4), que necesitan una ligera expansión de personal para maximizar ingresos. Por otro lado, las reasignaciones negativas (gamma-) señalan el exceso de mano de obra que debería reducirse para mejorar la eficiencia, con ejemplos claros en el restaurante 4 (0,24) o el restaurante 8 (0,1). La suma idéntica de 0,54 en ambas columnas demuestra un equilibrio en la redistribución: la mano de obra excedente de algunos puede reasignarse a aquellos que la necesitan, optimizando globalmente el recurso humano. Este análisis es crucial para identificar intervenciones precisas en la gestión de personal, dirigiendo los restaurantes hacia sus objetivos de rentabilidad. En cuanto al análisis de la viabilidad de la inversión, el coste de reasignación de los recursos sería de $0,54(\text{suma de gamma+}) * 1(\text{precio de coste de reasignación+}) + 0,54(\text{suma de gamma-}) * 1(\text{precio de coste de reasignación-}) = 1,08$ lo cual es menor del ingreso o beneficio de aplicar esta metodología centralizada ya que con este enfoque se obtienen (3105,96-3097,77) 8,19 ingresos más, de forma que sí es rentable en términos económicos. La suma idéntica de 0,54 en las columnas de gamma refleja la intención de alcanzar una redistribución global de este recurso, reasignando el excedente de algunos para cubrir las necesidades de otros.

La evolución de los recursos de la mano de obra de los 20 restaurantes al aplicar los tres modelos se puede apreciar con las siguientes gráficas:

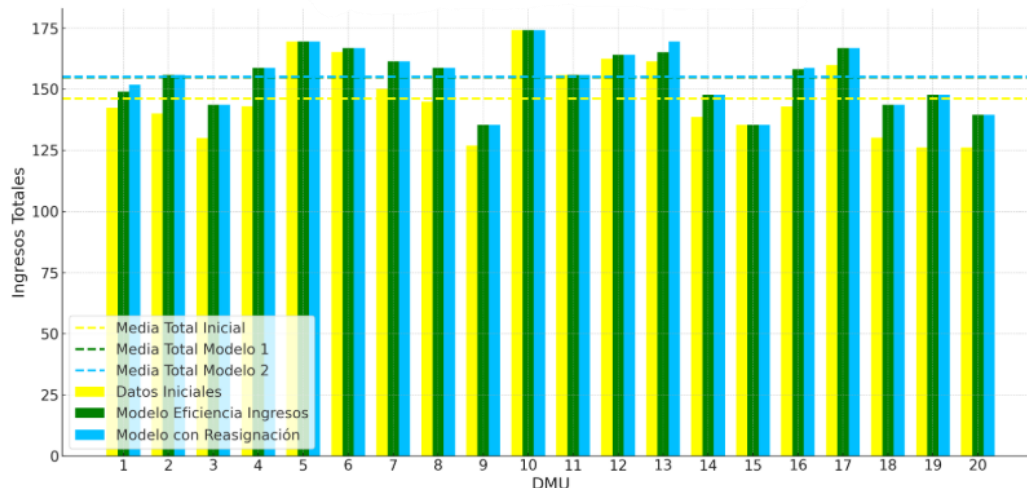


Ilustración 57 - Comparación Ingresos Ejemplo 2

Esta podría ser otra forma de representar los mismos datos, pero de una forma más visual:

Modelo 1: Modelo de Eficiencia en Ingresos

Modelo 2: Modelo con Reasignación Centralizada de Recursos

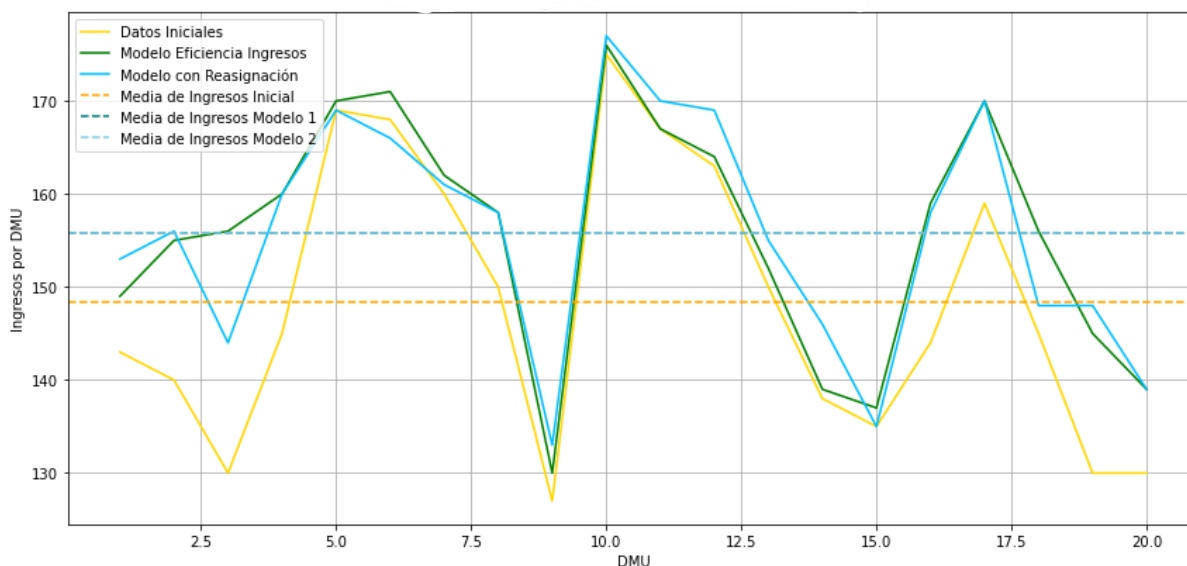


Ilustración 58 - Comparación Ingresos Ejemplo 2

Estas eran representaciones a nivel global pero también se puede ver el análisis variable por variable, estudiando la evolución de los targets para cada escenario

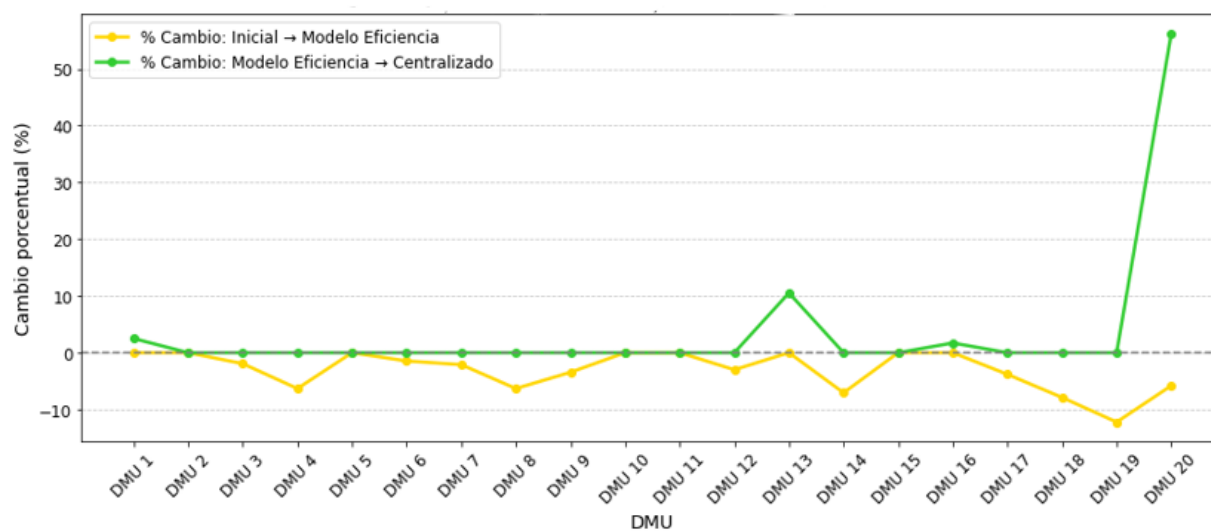


Ilustración 59 - Cambio Porcentual X1 Ejemplo 2

De x2 no hay gráfico ya que, al ser una variable no discrecional, siempre va a tener el mismo valor.

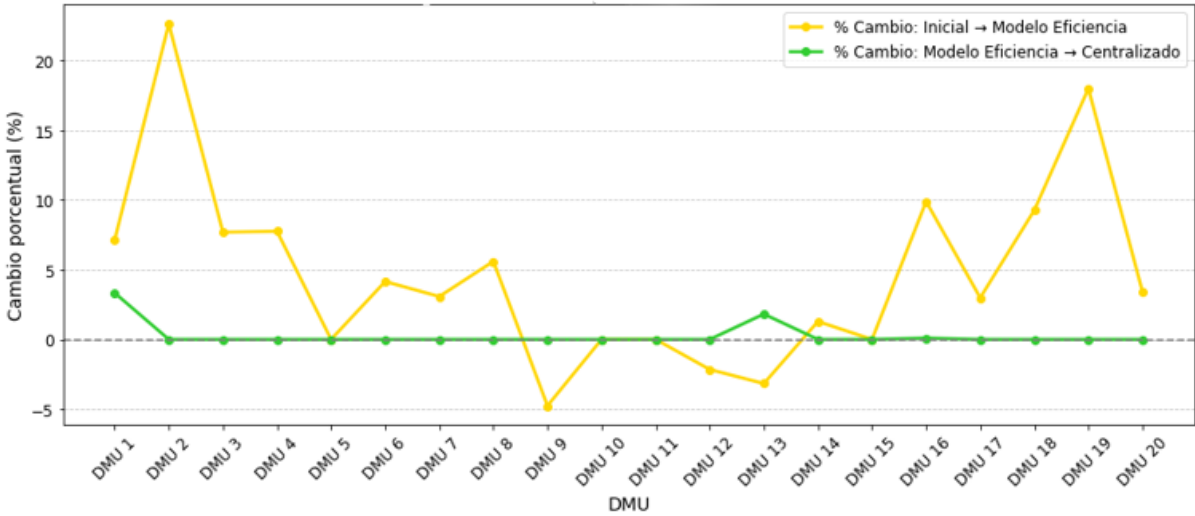


Ilustración 62 - Cambio Porcentual Y1 Ejemplo 2

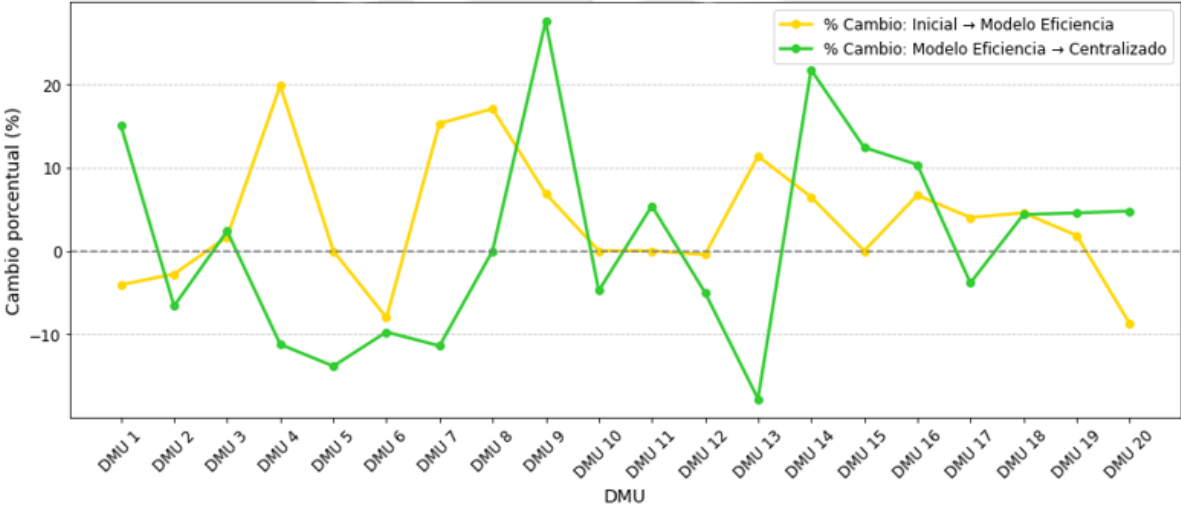


Ilustración 61 - Cambio Porcentual Y2 Ejemplo 2

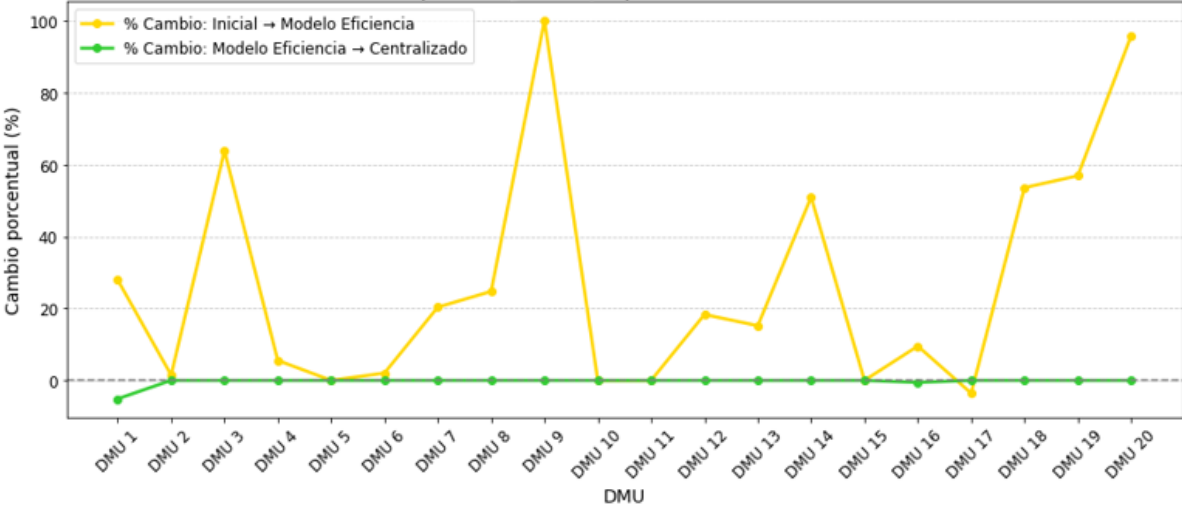


Ilustración 60 - Cambio Porcentual Y3 Ejemplo 2

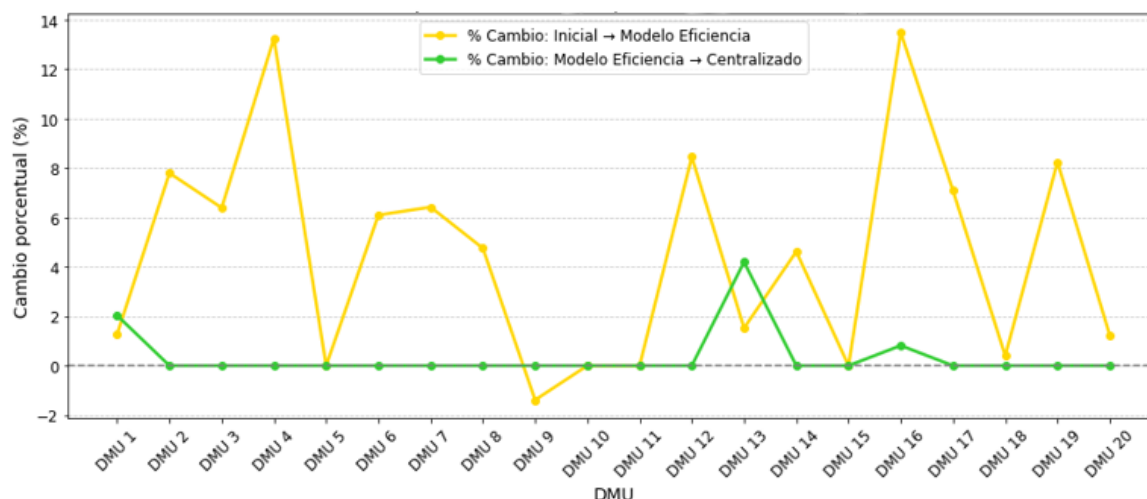


Ilustración 64 - Cambio Porcentual Y4 Ejemplo 2

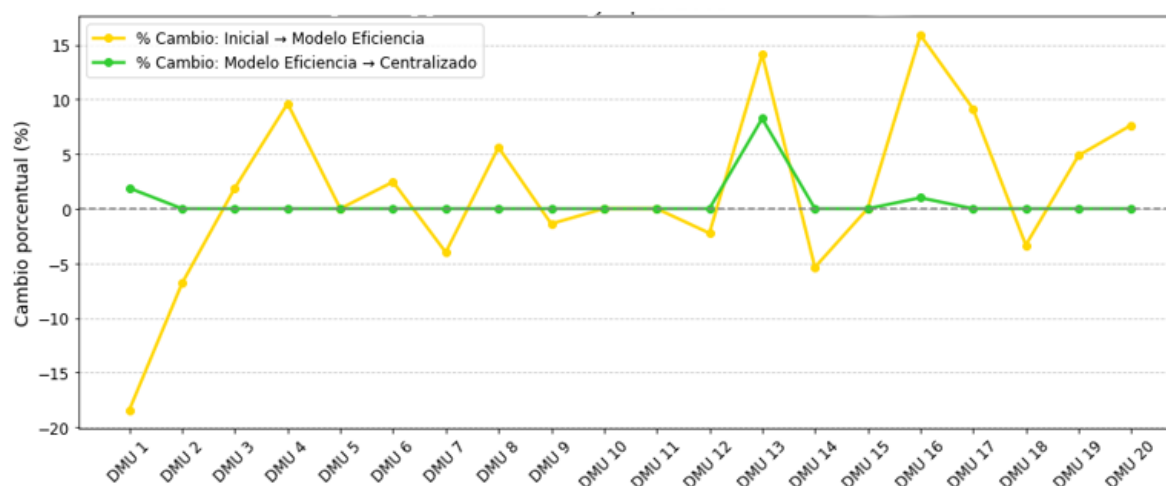


Ilustración 63 - Cambio Porcentual Y5 Ejemplo 2

El primer tramo de cada curva refleja el ajuste realizado por el modelo de eficiencia individual, típico del enfoque DEA, en el que cada unidad es evaluada en función de su capacidad para alcanzar la frontera eficiente manteniendo sus proporciones de recurso-producto. En este paso, los cambios suelen ser moderados y localizados, ya que las unidades eficientes permanecen inalteradas y las ineficientes simplemente se proyectan hacia su punto óptimo más cercano. En cambio, el segundo tramo introduce la lógica del modelo centralizado, que ya no busca la eficiencia por separado, sino reorganizar globalmente los recursos y resultados para optimizar el desempeño del conjunto. En las variables de entrada como x_1 , se observa una asignación relativamente contenida en la mayoría de los DMU, salvo en casos puntuales como DMU 20, que presenta un aumento de más del 50 %, indicando que el modelo centralizado identifica en él un nodo estratégico para concentrar recursos. Por el contrario, en las variables de salida, especialmente en y_3 y y_5 , destacan incrementos muy pronunciados en el primer tramo (como el salto del DMU 9 en y_3 , que alcanza el 100 % de crecimiento frente al valor inicial), mientras que en el segundo tramo las curvas se estabilizan, lo cual sugiere que la redistribución de outputs se realiza mayoritariamente durante el ajuste individual, dejando al modelo centralizado con poco margen de mejora adicional en estas variables. En este contexto, el modelo centralizado no actúa como una mera corrección, sino como un órgano de reasignación estratégica, que otorga o retrae inputs y outputs según el potencial colectivo de cada unidad, en busca de un equilibrio más productivo desde una lógica sistémica, y no simplemente técnica.

Estas serían las gráficas a nivel de análisis por DMU, las más relevantes (el resto están en el anexo) (el modelo con costes de reasignación no aparece ya que los resultados son los mismos que el centralizado):

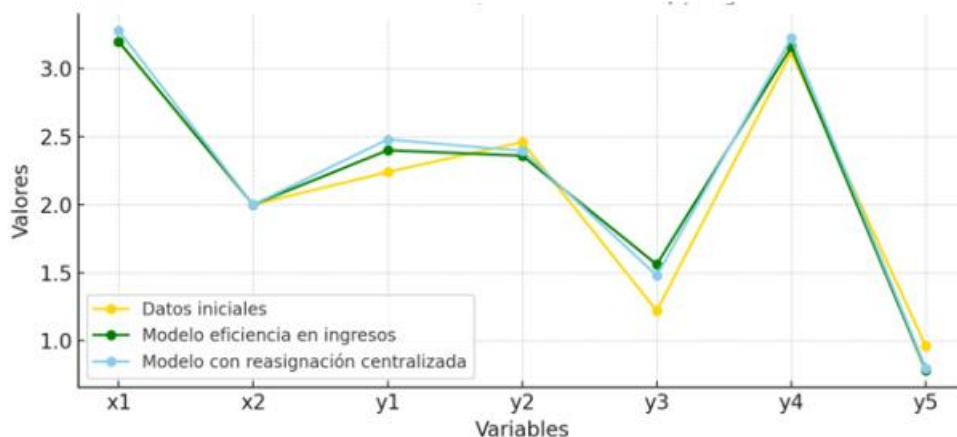


Ilustración 65 - Análisis DMU 1 Ejemplo 2

En la transición hacia el modelo de eficiencia se detecta un aumento en los outputs, conservando los niveles de inputs. Esto es coherente con el enfoque DEA, que maximiza los resultados sin alterar los recursos asignados. El modelo centralizado incrementa aún más los outputs, reflejando una asignación estratégica de recursos que potencia el rendimiento colectivo.

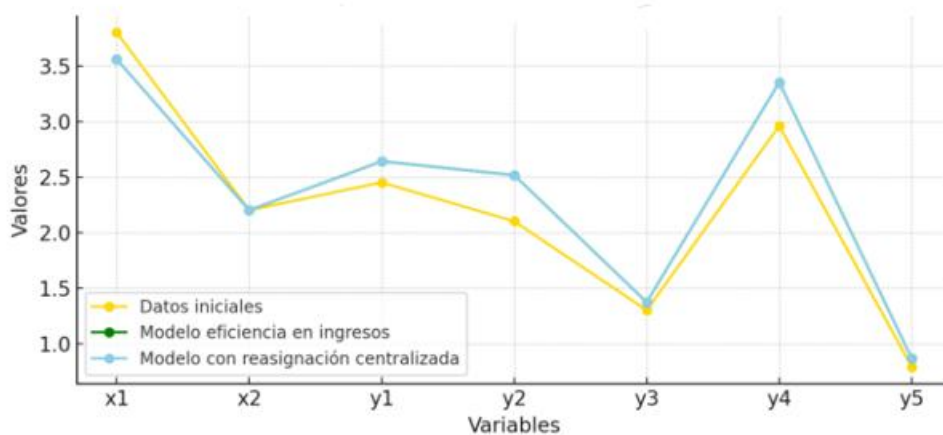


Ilustración 66 - Análisis DMU 4 Ejemplo 2

El comportamiento sigue la lógica DEA: mejoran los outputs sin incremento de inputs. Su desempeño se estabiliza posteriormente, lo que sugiere que alcanza un techo razonable dentro del sistema.

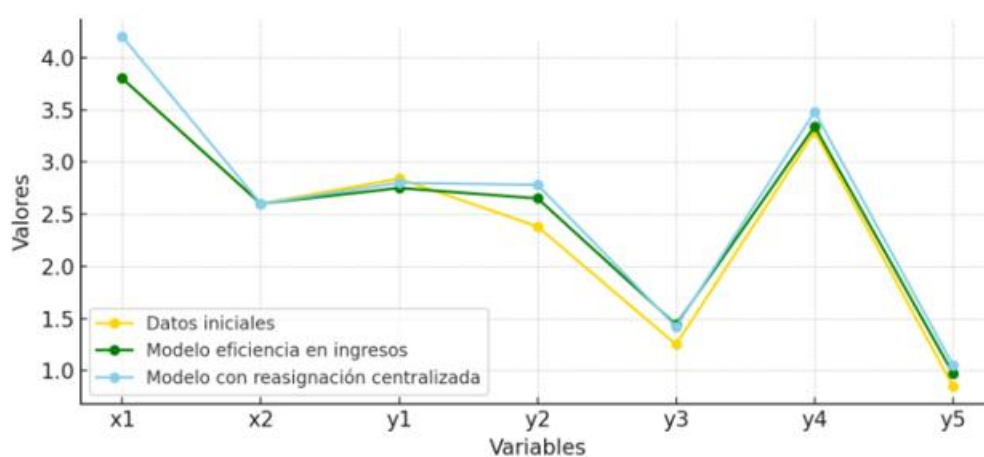


Ilustración 67 - Análisis DMU 13 Ejemplo 2

Tras un salto en eficiencia, el modelo centralizado lo potencia aún más. Es un ejemplo claro de una unidad que el sistema considera clave para maximizar la producción conjunta.

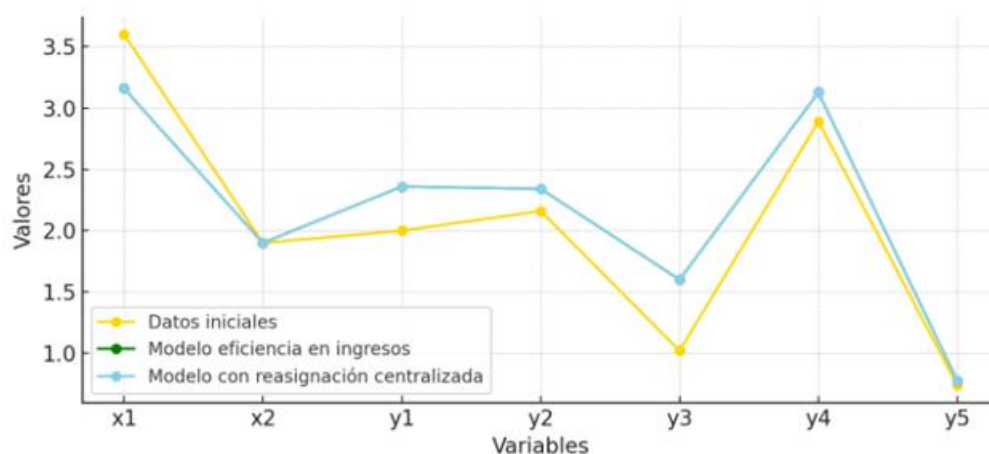


Ilustración 68 - Análisis DMU 19 Ejemplo 2

Evoluciona con mejoras claras en outputs, manteniendo los recursos estables. Es una unidad que probablemente ya estaba cercana a la frontera eficiente.

6 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Con el objetivo de evaluar la robustez y adaptabilidad del modelo propuesto, se ha llevado a cabo un análisis de sensibilidad enfocado en dos elementos clave:

- ❖ Los precios asignados a los outputs.
- ❖ Los costes de reasignación de los inputs.

Ambos elementos influyen directamente en el comportamiento del modelo, especialmente en la fase de redistribución de recursos llevada a cabo en el modelo centralizado.

Para este análisis se han utilizado los mismos datos de partida (inputs y outputs originales) del conjunto de variables discrecionales, aplicando dos escenarios distintos. Tanto para el caso original, con los precios y costes utilizados durante la modelización base, como para el caso modificado, con precios de outputs modificados (por ejemplo, duplicando el precio de y1 y aumentando el peso de y2), así como una configuración distinta de los costes de reasignación, incluyendo valores más altos y diferenciados por DMU. Se presenta tanto para el caso de dos variables de entrada discrecionales como para el caso de una variable de entrada discrecional y otra no discrecional.

6.1. Ejemplo 1

Primero se muestran los datos iniciales y los resultados obtenidos en cada escenario (con los nuevos precios y costes de reasignación), para el caso del ejemplo 1, es decir, el que sólo tiene variables discrecionales:

DATOS INICIALES					
DMU	x1	x2	y1	y2	ingresos totales
1	39	49	12	17,53	34,52
2	37	45	19	22	51,20
3	35	55	17,29	17	44,78
4	34	63,97	25	12,97	57,78
5	33	53	28	18,72	67,23
6	70	50	34	43	93,80
7	45	55,56	25	0	50,00
8	60	62,38	45	37,42	112,45
9	30	83,33	75	64,03	188,42
10	40	90	34	59,27	103,56
11	75	75	82	75	209,00
12	45	125	78	101,7	217,02
13	60	93,75	35	93,54	126,12
14	87	53,57	75	120	222,00
15	85	66,18	85	111	236,60
16	91	99	100	171	302,60
17	115,2	169	115	212	357,20
18	86,4	240	80	151	250,60
19	247	189	230	347	668,20
20	240	180	247	359	709,40
Precios			2,00	0,60	4.102,49
					TOTAL

Tabla 11 - Datos Iniciales Nuevos Precios y Costes Ejemplo 1

MODELO DE EFICIENCIA					
DMU	x1	x2	y1	y2	ingresos totales
1	39,00	49,00	27,15	31,08	72,94
2	37,00	45,00	19,00	22,00	51,20
3	35,00	55,00	33,43	32,14	86,14
4	34,00	63,97	47,11	43,60	120,37
5	33,00	53,00	28,00	18,72	67,23
6	66,17	50,00	51,67	79,18	150,85
7	45,00	55,56	42,80	50,64	115,98
8	60,00	62,38	66,46	86,03	184,54
9	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
10	40,00	87,93	83,19	78,08	213,23
11	75,00	75,00	87,64	114,74	244,13
12	45,00	90,24	87,29	85,10	225,63
13	60,00	93,75	96,75	104,71	256,32
14	87,00	53,57	75,00	120,00	222,00
15	85,00	66,18	84,64	123,01	243,09
16	91,00	99,00	114,62	144,37	315,85
17	115,20	122,55	144,78	183,70	399,79
18	86,40	109,29	121,19	143,25	328,34
19	240,00	180,00	247,00	359,00	709,40
20	240,00	180,00	247,00	359,00	709,40
Precios			2,00	0,60	4.904,85
					TOTAL

Tabla 12 - Resultados Modelo Eficiencia Nuevos Precios y Costes Ejemplo 1

MODELO CENTRALIZADO					
DMU	x1	x2	y1	y2	ingresos totales
1	240,00	180,00	247,00	359,00	709,40
2	87,00	53,57	75,00	120,00	222,00
3	240,00	180,00	247,00	359,00	709,40
4	240,00	180,00	247,00	359,00	709,40
5	87,00	53,57	75,00	120,00	222,00
6	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
7	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
8	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
9	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
10	169,02	121,35	167,21	248,13	483,30
11	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
12	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
13	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
14	87,00	53,57	75,00	120,00	222,00
15	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
16	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
17	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
18	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
19	30,00	83,33	75,00	64,03	188,42
20	44,58	75,72	75,00	78,34	197,01
Precios			2,00	0,60	5.735,52
costes reasignación	1,20	0,85			TOTAL

Tabla 13 - Resultados Modelo Reasignación Centralizada de Recursos Nuevos Precios y Costes Ejemplo 1

Seguidamente, se muestra la comparación de los ingresos totales por DMU en los tres escenarios del modelo (datos iniciales, modelo de eficiencia y modelo centralizado), tanto para el caso con los precios originales como para el caso con los precios modificados:

DMU	INGRESOS TOTALES					
	Datos Originales			Datos modificados		
	Datos iniciales	Modelo de Eficiencia	Modelo Centralizado	Datos iniciales	Modelo de Eficiencia	Modelo Centralizado
1	13,75	30,25	81,40	34,52	72,94	709,40
2	21,20	21,20	81,40	51,20	51,20	222,00
3	18,99	36,64	282,90	44,78	86,14	709,40
4	26,30	51,47	282,90	57,78	120,37	709,40
5	29,87	29,87	189,43	67,23	67,23	222,00
6	38,30	59,59	81,40	93,80	150,85	188,42
7	25,00	47,86	81,40	50,00	115,98	188,42
8	48,74	75,07	81,40	112,45	184,54	188,42
9	81,40	81,40	81,40	188,42	188,42	188,42
10	39,93	91,00	81,40	103,56	213,23	483,30
11	89,50	99,12	81,40	209,00	244,13	188,42
12	88,17	95,80	85,43	217,02	225,63	188,42
13	44,35	107,22	87,00	126,12	256,32	188,42
14	87,00	87,00	87,00	222,00	222,00	222,00
15	96,10	96,94	87,00	236,60	243,09	188,42
16	117,10	129,05	81,40	302,60	315,85	188,42
17	136,20	163,15	81,40	357,20	399,79	188,42
18	95,10	135,52	81,40	250,60	328,34	188,42
19	264,70	282,90	282,90	668,20	709,40	188,42
20	282,90	282,90	81,40	709,40	709,40	197,01
TOTAL	1.644,61	2.003,95	2.361,39	4.102,49	4.904,85	5.735,52

Tabla 14 - Comparación Ingresos Nuevos Precios y Costes Ejemplo 1

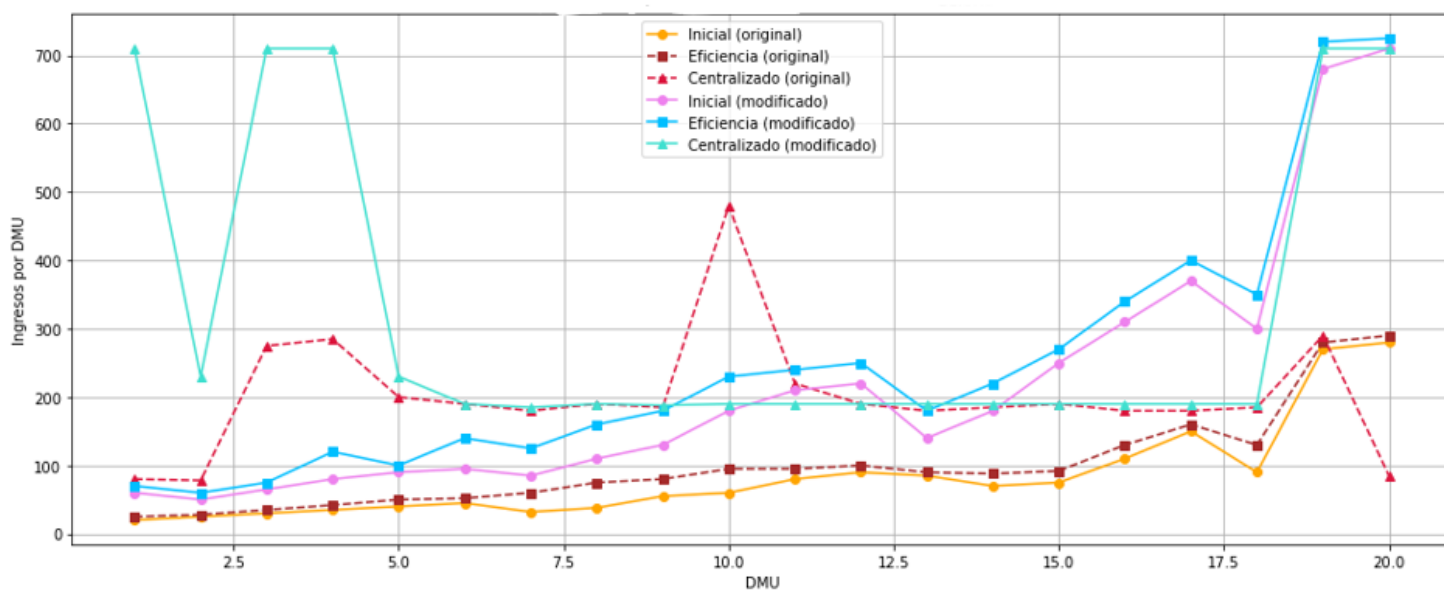


Ilustración 69- Comparación Ingresos Ejemplo 1

En cuanto a las conclusiones de este análisis de sensibilidad, los resultados reflejan con claridad que el modelo es altamente sensible a las condiciones de entrada, en especial a los precios de los outputs, que tienen un impacto directo sobre la función objetivo del modelo centralizado (maximización de ingresos).

En el caso original, el modelo realiza una redistribución moderada, incrementando los ingresos totales del sistema un 101% al pasar del escenario inicial al centralizado.

En el caso modificado, con precios más agresivos para los outputs más relevantes, el salto es abrumador: se triplica la cantidad total de ingresos respecto al modelo original, alcanzando más de 10.000 unidades de ingreso total en el modelo centralizado.

Este comportamiento demuestra que el modelo no solo detecta qué DMUs tienen mayor capacidad para generar ingresos, sino que adapta toda la distribución de recursos para potenciar al máximo dichas unidades. Así, DMUs como el 3, 4, 5 o 20 se ven fuertemente priorizados en el nuevo escenario.

En cuanto a los costes de reasignación, el escenario modificado incluye penalizaciones más altas (y diferenciadas por DMU), lo cual se traduce en movimientos de inputs más selectivos y justificados. El modelo tiende a reducir la reasignación hacia DMUs donde el coste es más elevado, redirigiendo los recursos hacia aquellas unidades con mejor relación coste-beneficio. Este comportamiento refuerza el valor del modelo como herramienta realista y ajustable a condiciones operativas.

Este apartado confirma que el modelo de optimización centralizada no es estático ni rígido, sino que reacciona de forma inteligente a los cambios en el entorno. Los precios y los costes de reasignación actúan como palancas estratégicas que pueden guiar el comportamiento del sistema hacia distintas configuraciones, en función de los objetivos prioritarios de la organización (maximizar ingresos, contener costes logísticos, priorizar ciertas unidades, etc.).

En definitiva, el análisis de sensibilidad no solo valida la coherencia del modelo, sino que demuestra su versatilidad y aplicabilidad en contextos reales, donde estas condiciones pueden cambiar con el tiempo o entre proyectos.

6.2. Ejemplo 2

Primero se muestran los datos iniciales y los resultados obtenidos en cada escenario (con los nuevos precios y costes de reasignación), para el ejemplo en el que sí hay tanto variables discrecionales como variables no discrecionales

DATOS INICIALES									ingresos totales
DMU	x1	x2	y1	y2	y3	y4	y5		
1	3,2	2	2,24	2,46	1,22	3,12	0,96		149,64
2	3,4	2,1	2,12	2,52	1,34	3,08	0,88		147,56
3	3,1	1,8	2,08	2,25	1,05	2,85	0,74		136,49
4	3,8	2,2	2,45	2,1	1,3	2,96	0,79		147,39
5	4,2	2,6	2,8	2,78	1,42	3,48	1,05		176,37
6	4,1	2,5	2,65	2,95	1,38	3,25	0,98		172,49
7	3,8	2,3	2,6	2,24	1,15	3,18	0,95		155,69
8	3,8	2,2	2,5	2,15	1,1	3,2	0,82		150,4
9	2,9	1,6	2,1	2,04	0,98	2,88	0,72		132,88
10	4,2	2,8	2,9	2,85	1,52	3,36	1,12		180,5
11	3,4	2,1	2,6	2,45	1,36	3,32	0,82		161,76
12	4	2,4	2,78	2,66	1,18	3,15	0,98		168,41
13	3,8	2,6	2,84	2,38	1,25	3,29	0,85		166,22
14	3,4	1,9	2,33	2,2	1,06	2,99	0,82		144,33
15	2,8	1,6	2	2,18	1,96	2,84	0,71		140,03
16	3,5	2,2	2,4	2,25	1,26	2,93	0,74		147,85
17	4,2	2,5	2,68	2,5	1,46	3,22	0,92		165,3
18	3,3	1,8	2,05	2,2	1,12	3,02	0,78		137,04
19	3,6	1,9	2	2,16	1,02	2,89	0,74		132,75
20	3,1	1,7	2,05	2,12	0,94	2,9	0,68		132,58
precios			28	18	8	9	5		3.045,68
									TOTAL

Tabla 15 - Datos Iniciales Nuevos Precios y Costes Ejemplo 2

Seguidamente, se muestra, en formato tabular y gráfico, la evolución de los ingresos totales por DMU en los tres escenarios del modelo (datos iniciales, modelo de eficiencia y modelo centralizado), tanto para el caso con los precios originales como para el caso con los precios modificados

MODELO DE EFICIENCIA									ingresos totales
DMU	x1	x2	y1	y2	y3	y4	y5		
1	3,20	2,00	2,40	2,36	1,56	3,16	0,78		154,52
2	3,40	2,10	2,60	2,45	1,36	3,32	0,82		161,76
3	3,04	1,80	2,24	2,29	1,72	3,03	0,75		148,72
4	3,56	2,20	2,64	2,52	1,37	3,35	0,87		164,68
5	4,20	2,60	2,80	2,78	1,42	3,48	1,05		176,37
6	4,04	2,50	2,76	2,71	1,41	3,45	1,00		173,45
7	3,72	2,30	2,68	2,58	1,38	3,38	0,91		167,60
8	3,56	2,20	2,64	2,52	1,37	3,35	0,87		164,68
9	2,80	1,60	2,00	2,18	1,96	2,84	0,71		140,03
10	4,20	2,80	2,90	2,85	1,52	3,36	1,12		180,50
11	3,40	2,10	2,60	2,45	1,36	3,32	0,82		161,76
12	3,88	2,40	2,72	2,65	1,40	3,42	0,96		170,53
13	3,80	2,60	2,75	2,65	1,44	3,34	0,97		171,13
14	3,16	1,90	2,36	2,34	1,60	3,13	0,78		153,07
15	2,80	1,60	2,00	2,18	1,96	2,84	0,71		140,03
16	3,50	2,20	2,64	2,50	1,38	3,33	0,86		164,10
17	4,04	2,50	2,76	2,71	1,41	3,45	1,00		173,45
18	3,04	1,80	2,24	2,29	1,72	3,03	0,75		148,72
19	3,16	1,90	2,36	2,34	1,60	3,13	0,78		153,07
20	2,92	1,70	2,12	2,23	1,84	2,94	0,73		144,38
precios			28	18	8	9	5		3.212,55
									TOTAL

Tabla 16 - Resultados Modelo de Eficiencia Nuevos Precios y Costes Ejemplo 2

MODELO CENTRALIZADO									ingresos totales
DMU	x1	x2	y1	y2	y3	y4	y5		
1	3,28	2,00	2,48	2,40	1,48	3,22	0,80	157,41	
2	3,40	2,10	2,60	2,45	1,36	3,32	0,82	161,76	
3	3,04	1,80	2,24	2,29	1,72	3,03	0,75	148,72	
4	3,56	2,20	2,64	2,52	1,37	3,35	0,87	164,68	
5	4,20	2,60	2,80	2,78	1,42	3,48	1,05	176,37	
6	4,04	2,50	2,76	2,71	1,41	3,45	1,00	173,45	
7	3,72	2,30	2,68	2,58	1,38	3,38	0,91	167,60	
8	3,56	2,20	2,64	2,52	1,37	3,35	0,87	164,68	
9	2,80	1,60	2,00	2,18	1,96	2,84	0,71	140,03	
10	4,20	2,80	2,90	2,85	1,52	3,36	1,12	180,50	
11	3,40	2,10	2,60	2,45	1,36	3,32	0,82	161,76	
12	3,88	2,40	2,72	2,65	1,40	3,42	0,96	170,53	
13	4,20	2,60	2,80	2,78	1,42	3,48	1,05	176,37	
14	3,16	1,90	2,36	2,34	1,60	3,13	0,78	153,07	
15	2,80	1,60	2,00	2,18	1,96	2,84	0,71	140,03	
16	3,56	2,20	2,64	2,52	1,37	3,35	0,87	164,68	
17	4,04	2,50	2,76	2,71	1,41	3,45	1,00	173,45	
18	3,04	1,80	2,24	2,29	1,72	3,03	0,75	148,72	
19	3,16	1,90	2,36	2,34	1,60	3,13	0,78	153,07	
20	4,56	1,70	2,12	2,23	1,84	2,94	0,73	144,38	
precios			28,00	18,00	8,00	9,00	5,00	3.221,26	
costes de reasignación	1,8	1,8						TOTAL	

Tabla 15 - Resultados Modelo con Reasignación Centralizada de Recursos Nuevos Precios y Costes Ejemplo 2

Tabla 16 - Comparación Ingresos Nuevos Precios y Costes Ejemplo 2

DMU	INGRESOS TOTALES					
	Datos Originales			Datos modificados		
	Datos iniciales	Modelo de Eficiencia	Modelo Centralizado	Datos iniciales	Modelo de Eficiencia	Modelo Centralizado
1	142,38	149,11	151,84	149,64	154,52	157,41
2	140,16	155,93	155,93	147,56	161,76	161,76
3	130,13	143,65	143,65	136,49	148,72	148,72
4	143,03	158,65	158,65	147,39	164,68	164,68
5	169,53	169,53	169,53	176,37	176,37	176,37
6	165,29	166,81	166,81	172,49	173,45	173,45
7	150,23	161,37	161,37	155,69	167,60	167,60
8	144,91	158,65	158,65	150,40	164,68	164,68
9	127,04	135,47	135,47	132,88	140,03	140,03
10	174,27	174,27	174,27	180,50	180,50	180,50
11	155,93	155,93	155,93	161,76	161,76	161,76
12	162,50	164,09	164,09	168,41	170,53	170,53
13	161,37	165,10	169,53	166,22	171,13	176,37
14	138,56	147,75	147,75	144,33	153,07	153,07
15	135,47	135,47	135,47	140,03	140,03	140,03
16	142,95	158,22	158,65	147,85	164,10	164,68
17	159,94	166,81	166,81	165,30	173,45	173,45
18	130,26	143,65	143,65	137,04	148,72	148,72
19	126,16	147,75	147,75	132,75	153,07	153,07
20	126,24	139,56	139,56	132,58	144,38	144,38
TOTAL	2.926,35	3.097,77	3.105,36	3.045,68	3.212,55	3.221,26

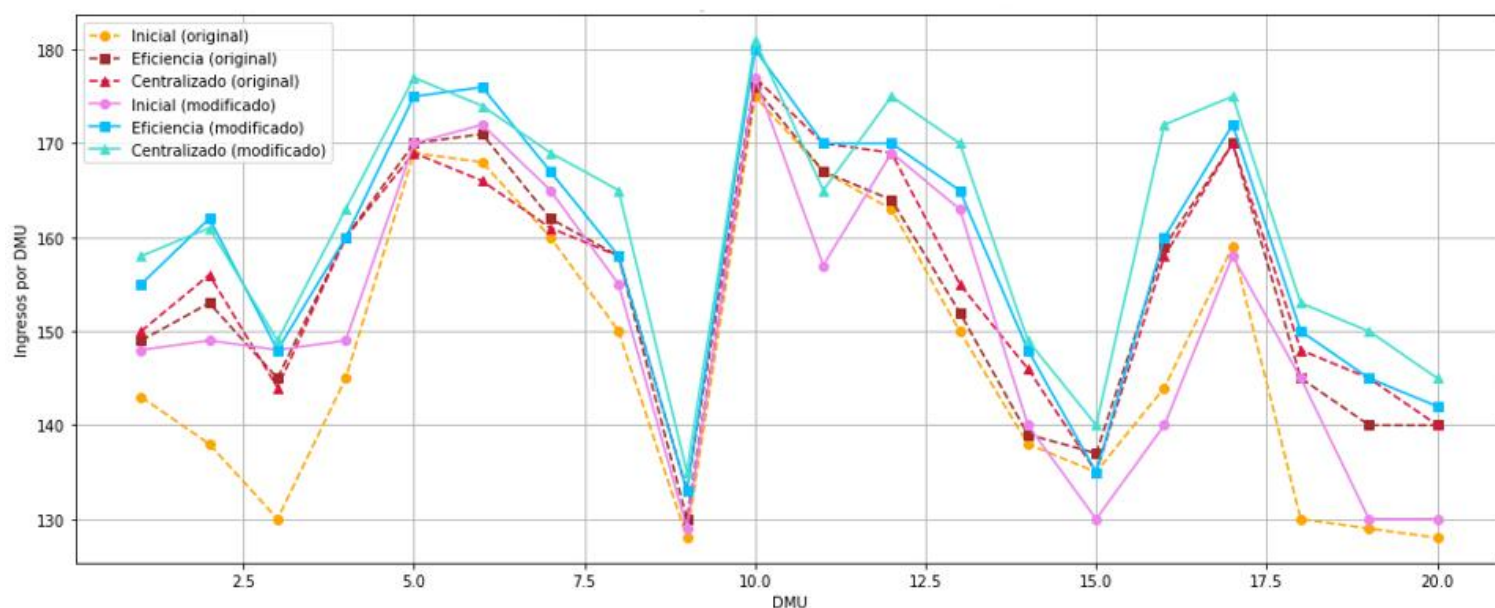


Ilustración 70 - Comparación Ingresos Ejemplo 2

Al igual que en el primer conjunto de datos, se confirma que el modelo responde con claridad a los cambios introducidos en los precios de los outputs y en los costes de reasignación:

En el caso original, los ingresos totales evolucionan desde 2.926,35 unidades (datos iniciales) hasta 3.110,91 unidades en el modelo centralizado. El incremento es moderado pero consistente, resultado de una redistribución eficiente que respeta las restricciones de no discrecionalidad.

En el caso con precios modificados, el ingreso total crece hasta 3.243,24 unidades, un aumento de más de 130 unidades respecto al modelo base. Aunque menos impactante que en el caso de variables discrecionales, sigue reflejando la alta sensibilidad del modelo ante los parámetros económicos.

Además, se observan pequeños ajustes en las asignaciones por DMU: unidades como la DMU 1, 2 y 4 reciben un pequeño impulso adicional en el modelo centralizado cuando los precios de ciertos outputs se incrementan. Esto ocurre porque su perfil de producción está más alineado con esos outputs, y el modelo optimiza la asignación en función del nuevo peso relativo de cada variable.

En cuanto a los costes de reasignación, al aplicar una penalización más alta y asimétrica, el modelo tiende a ser más prudente en los ajustes de inputs, realizando movimientos más contenidos y realistas. Esto refuerza la idea de que el modelo puede ser utilizado con lógica operativa, teniendo en cuenta restricciones logísticas o económicas reales entre DMUs.

En cuanto a las conclusiones de este análisis de sensibilidad, el comportamiento del modelo en este segundo conjunto de datos reafirma las conclusiones obtenidas anteriormente. La solución obtenida depende directamente del marco económico bajo el que se apliquen los precios y costes, lo que convierte a esta herramienta en una solución flexible y adaptable.

Este análisis demuestra que el modelo no sólo garantiza soluciones técnicamente válidas, sino que incorpora sensibilidad económica, permitiendo al decisor tomar decisiones estratégicas y operativas más informadas. La posibilidad de ajustar tanto los precios como los costes por DMU convierte al modelo en una solución versátil, adecuada para entornos donde las condiciones cambian con frecuencia o donde se requiere priorizar determinadas unidades.

7 CONCLUSIÓN

A lo largo de este trabajo, se ha llevado a cabo un análisis profundo y estructurado sobre la eficiencia de las unidades de decisión utilizando modelos DEA y su extensión hacia un enfoque centralizado. El objetivo no ha sido solo el de identificar qué tan eficientemente actúan las DMU de forma individual, sino también explorar cómo una reasignación colectiva de recursos puede mejorar el rendimiento global del sistema. Este planteamiento ha resultado especialmente revelador al evidenciar cómo, en ocasiones, el interés del conjunto puede entrar en tensión con las lógicas de eficiencia aislada.

El proceso de modelado, acompañado de representaciones gráficas y análisis comparativos entre los escenarios inicial, de eficiencia y centralizado, ha permitido visualizar con claridad el impacto de las decisiones de reasignación, tanto sobre los inputs como sobre los outputs. Se han detectado patrones de comportamiento comunes entre las DMU, así como casos puntuales en los que los cambios son especialmente significativos, ya sea por su ganancia o por la cesión de recursos en favor del bien común.

En definitiva, este TFG no solo ha permitido poner en práctica herramientas de análisis cuantitativo y modelado matemático aplicadas a la mejora de la eficiencia, sino que también ha servido como una oportunidad para entender más profundamente la dinámica entre optimización local y global. La experiencia de llevarlo a cabo ha sido exigente pero enriquecedora, y deja como aprendizaje principal que una buena asignación de recursos no es solo la que maximiza resultados individuales, sino la que encuentra el equilibrio justo para que el sistema, en su conjunto, funcione mejor.

REFERENCIAS

- [1] Lozano,S., Villa,G., Centralized Resource Allocation Using Data Envelopment Analysis. Journal of Productivity Analysis 2004;22:143-61.
- [2] Asmild,M., Paradi,JC., Pastor,JT., Centralized resource allocation BCC models. 2009; 40-49.
- [3] Fang , Li , Centralized resource allocation based on the cost–revenue analyse. 2015 ; 1-7.
- [4] Villa,G. Fundamentos del Análisis por Envoltura de Datos (DEA), Universidad de Sevilla. 2020;1-35
- [5] Espinosa,P. Programación y validación de modelos básicos DEA de tipo centralizado, 2023; 15-42.

ANEXO

MODELOS DEA CODIFICADOS EN LINGO

MODELOS DEL PRIMER JUEGO DE DATOS

Modelo de Eficiencia en Ingresos

SETS:

```
DMU:MAXREV;  
INPUT;  
SETU;  
OUTPUT: YPRICE;
```

```
!DATAU(DMU,SETU): XND;  
DATAINPUT(DMU,INPUT): X, XHAT;  
DATAOUTPUT(DMU,OUTPUT): Y, YHAT;
```

```
DMU2(DMU,DMU):LAMBDA;
```

ENDSETS

DATA:

```
DMU=1..20;  
SETU=1..1;  
INPUT=1..2;  
OUTPUT=1..2;
```

```
X,Y,YPRICE = @OLE('DMU_data_copia_juego_datos_2.xlsx');  
@OLE('DMU_data_copia_juego_datos_2.xlsx')=XHAT, YHAT,MAXREV;
```

ENDDATA

```
MAX = OBJ;  
OBJ = @SUM(DMU(R): MAXREV(R));
```

```
@FOR(DMU(R):
```

```
    MAXREV(R)=@SUM(OUTPUT(K):YPRICE(K)*YHAT(R,K));
```

```
    !@FOR(SETU(I):  
        @SUM(DMU(J):LAMBDA(J,R)*XND(J,I))<=XND(R,I);  
    !);
```

```
@FOR(INPUT(I):  
    @SUM(DMU(J):LAMBDA(J,R)*X(J,I))=XHAT(R,I);  
    XHAT(R,I)<=X(R,I);  
);
```

```
@FOR(OUTPUT(K):  
    @SUM(DMU(J):LAMBDA(J,R)*Y(J,K))=YHAT(R,K);  
);
```

```
@SUM(DMU(J) : LAMBDA(J,R)) = 1;  
);
```

Modelo de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos

SETS:

```
DMU: MAXREV1;      ! Ingreso por DMU;  
INPUT;             ! Entradas redistribuibles;  
!INPUTND;          ! Entradas NO redistribuibles (SETU);  
OUTPUT: YPRICE;    ! Salidas y precios;  
  
DMU2(DMU,DMU) : LAMBDA;  
  
DATAINPUT(DMU,INPUT) : X, XHAT1;  
!DATAINPUTND(DMU,INPUTND) : XND; ! Entradas no redistribuibles;  
DATAOUTPUT(DMU,OUTPUT) : Y, YHAT1;
```

ENDSETS

DATA:

```
DMU = 1..20;  
INPUT = 1..2;  
!INPUTND = 1..1;  
OUTPUT = 1..2;  
  
X, Y, YPRICE = @OLE('DMU_data_copia_juego_datos_2.xlsx');  
@OLE('DMU_data_copia_juego_datos_2.xlsx') = XHAT1, YHAT1, MAXREV1;
```

ENDDATA

```
MAX = OBJ;  
OBJ = @SUM(DMU(R) : MAXREV1(R));
```

@FOR(DMU(R) :

```
! Función objetivo: ingresos ponderados por precios;  
MAXREV1(R) = @SUM(OUTPUT(K) : YPRICE(K) * YHAT1(R,K));
```

```
! OUTPUT projection;
```

```
@FOR(OUTPUT(K) :  
    @SUM(DMU(J) : LAMBDA(J,R) * Y(J,K)) >= YHAT1(R,K);  
);
```

```
! INPUT redistribuibles: igualdad;
```

```
@FOR(INPUT(I) :  
    @SUM(DMU(J) : LAMBDA(J,R) * X(J,I)) <= XHAT1(R,I);  
);
```

```
! INPUT no redistribuibles: restricción local = disponible;
```

```
!@FOR(INPUTND(I) :  
    @SUM(DMU(J) : LAMBDA(J,R) * XND(J,I)) <= XND(R,I);  
!);
```

```
! Combinación convexa;
```

```
@SUM(DMU(J) : LAMBDA(J,R)) = 1;
```

```
);  
  
! INPUT no redistribuibles: suma total constante (global);  
@FOR (INPUT (I) :  
    @SUM (DMU (R) : XHAT1 (R, I)) = @SUM (DMU (R) : X (R, I)) ;  
);  
  
END
```

Modelo de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación

```
SETS:  
  
DMU: MAXREV3;      ! Ingreso por DMU;  
INPUT;             ! Entradas redistribuibles;  
!INPUTND;          ! Entradas NO redistribuibles (SETU);  
OUTPUT: YPRICE;    ! Salidas y precios;  
  
DMU2 (DMU, DMU) : LAMBDA;  
  
DATAINPUT (DMU, INPUT) : X, XHAT3, CPLUS3, CMINUS3, GAMMAP3, GAMMAM3;  
!DATAINPUTND (DMU, INPUTND) : XND; ! Entradas no redistribuibles;  
DATAOUTPUT (DMU, OUTPUT) : Y, YHAT3;  
  
ENDSETS  
  
DATA:  
  
DMU = 1..20;  
INPUT = 1..2;  
!INPUTND = 1..1;  
OUTPUT = 1..2;  
  
X, Y, YPRICE, CPLUS3, CMINUS3 = @OLE('DMU_data_copia_juego_datos_2.xlsx');  
@OLE('DMU_data_copia_juego_datos_2.xlsx') = XHAT3, YHAT3, MAXREV3, GAMMAP3,  
GAMMAM3;  
  
ENDDATA  
  
MINTOTALREV=2361.39;  
  
@SUM (DMU (R) : MAXREV3 (R))=MINTOTALREV;  
  
MIN = OBJ;  
OBJ=@SUM (DATAINPUT (R, I) : CPLUS3 (R, I) *GAMMAP3 (R, I)) +@SUM (DATAINPUT (R, I) :  
CMINUS3 (R, I) *GAMMAM3 (R, I)) ;  
  
@FOR (DMU (R) :  
  
    ! Función objetivo: ingresos ponderados por precios;  
    MAXREV3 (R) = @SUM (OUTPUT (K) : YPRICE (K) * YHAT3 (R, K)) ;  
  
    ! OUTPUT projection;  
    @FOR (OUTPUT (K) :  
        @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) * Y (J, K)) >= YHAT3 (R, K) ;  
    );
```

```
! INPUT redistribuibles: igualdad;
@FOR (INPUT (I) :
    @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) * X (J, I)) <= XHAT3 (R, I) ;
    XHAT3 (R, I) = X (R, I) + GAMMAP3 (R, I) - GAMMAM3 (R, I) ;
);

! INPUT no redistribuibles: restricción local = disponible;
!@FOR (INPUTND (I) :
    @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) * XND (J, I)) <= XND (R, I) ;
!);

! Combinación convexa;
@SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R)) = 1;

);

! INPUT no redistribuibles: suma total constante (global);
@FOR (INPUT (I) :
    @SUM (DMU (R) : XHAT3 (R, I)) = @SUM (DMU (R) : X (R, I)) ;
);

END
```

MODELOS DEL SEGUNDO JUEGO DE DATOS

Modelo de Eficiencia en Ingresos

SETS:

```
DMU:MAXREV;           ! Ingreso por DMU;
INPUT;                ! Entradas redistribuibles;
SETU;                 ! Entradas NO redistribuibles (SETU);
OUTPUT: YPRICE;       ! Salidas y precios;
```

```
DATAU (DMU, SETU) : XND;
DATAINPUT (DMU, INPUT) : X,
XHAT;
DATAOUTPUT (DMU, OUTPUT) : Y,
YHAT;
```

```
DMU2 (DMU, DMU) : LAMBDA;
```

ENDSETS

DATA:

```
DMU=1..20;
SETU=1..1;
INPUT=1..1;
OUTPUT=1..5;
```

```
XND,X,Y,YPRICE = @OLE('DMU_data.xlsx');
@OLE('DMU_data.xlsx')=XHAT, YHAT,MAXREV;
```

ENDDATA

```
MAX = OBJ;
OBJ = @SUM(DMU(R) : MAXREV(R));
```

```
@FOR(DMU(R) :
```

```
    MAXREV(R)=@SUM(OUTPUT(K) : YPRICE(K) *YHAT(R,K)); ! Función objetivo:
    ingresos ponderados por precios;
```

```
    @FOR(SETU(I) :
        @SUM(DMU(J) : LAMBDA(J,R) *XND(J,I)) <=XND(R,I); ! INPUT no
        redistribuibles: restricción local = disponible;
    );
```

```
    @FOR(INPUT(I) :
        @SUM(DMU(J) : LAMBDA(J,R) *X(J,I)) =XHAT(R,I); ! INPUT redistribuibles:
        igualdad;
        XHAT(R,I) <=X(R,I);
    );
```

```
    @FOR(OUTPUT(K) :
        @SUM(DMU(J) : LAMBDA(J,R) *Y(J,K)) =YHAT(R,K); ! OUTPUT projection;
    );
```

```
@SUM(DMU(J) : LAMBDA(J,R)) = 1; ! Combinación convexa;
```

```
);
```

Modelo de Eficiencia en Ingresos con Reasignación Centralizada de Recursos

```
SETS:
```

```
DMU: MAXREV1;      ! Ingreso por DMU;
INPUT;             ! Entradas redistribuibles;
INPUTND;           ! Entradas NO redistribuibles (SETU);
OUTPUT: YPRICE;    ! Salidas y precios;

DMU2 (DMU, DMU) : LAMBDA;

DATAINPUT (DMU, INPUT) : X, XHAT1;
DATAINPUTND (DMU, INPUTND) : XND;  ! Entradas no redistribuibles;
DATAOUTPUT (DMU, OUTPUT) : Y, YHAT1;
```

```
ENDSETS
```

```
DATA:
```

```
DMU = 1..20;
INPUT = 1..1;
INPUTND = 1..1;
OUTPUT = 1..5;

XND, X, Y, YPRICE = @OLE('DMU_data.xlsx');
@OLE('DMU_data.xlsx') = XHAT1, YHAT1, MAXREV1;
```

```
ENDDATA
```

```
MAX = OBJ;
```

```
OBJ = @SUM(DMU (R) : MAXREV1 (R) );
```

```
@FOR (DMU (R) :
```

```
    ! Función objetivo: ingresos ponderados por precios;
    MAXREV1 (R) = @SUM (OUTPUT (K) : YPRICE (K) * YHAT1 (R, K) );
```

```
    ! OUTPUT projection;
```

```
@FOR (OUTPUT (K) :
    @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) * Y (J, K) ) >= YHAT1 (R, K) ;
);
```

```
    ! INPUT redistribuibles: igualdad;
```

```
@FOR (INPUT (I) :
    @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) * X (J, I) ) <= XHAT1 (R, I) ;
);
```

```
    ! INPUT no redistribuibles: restricción local = disponible;
```

```
@FOR (INPUTND (I) :
    @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) * XND (J, I) ) <= XND (R, I) ;
);
```

```
    ! Combinación convexa;
```

```
@SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) ) = 1;
```

```
);
```

```
! INPUT no redistribuibles: suma total constante (global);
@FOR (INPUT (I) :
    @SUM (DMU (R) : XHAT1 (R, I)) = @SUM (DMU (R) : X (R, I)) ;
);

END
```

Modelo de Eficiencia en Ingresos con Costes de Reasignación

```
SETS:

DMU: MAXREV3;      ! Ingreso por DMU;
INPUT;             ! Entradas redistribuibles;
INPUTND;           ! Entradas NO redistribuibles (SETU);
OUTPUT: YPRICE;    ! Salidas y precios;

DMU2 (DMU, DMU) : LAMBDA;

DATAINPUT (DMU, INPUT) : X, XHAT3, CPLUS3, CMINUS3, GAMMAP3, GAMMAM3;
DATAINPUTND (DMU, INPUTND) : XND;  ! Entradas no redistribuibles;
DATAOUTPUT (DMU, OUTPUT) : Y, YHAT3;

ENDSETS

DATA:

DMU = 1..20;
INPUT = 1..1;
INPUTND = 1..1;
OUTPUT = 1..5;

XND, X, Y, YPRICE, CPLUS3, CMINUS3 = @OLE ('DMU_data.xlsx');
@OLE ('DMU_data.xlsx') = XHAT3, YHAT3, MAXREV3, GAMMAP3, GAMMAM3;

ENDDATA

MINTOTALREV=3105.360;

@SUM (DMU (R) : MAXREV3 (R)) = MINTOTALREV;

MIN = OBJ;
OBJ = @SUM (DATAINPUT (R, I) : CPLUS3 (R, I) * GAMMAP3 (R, I)) + @SUM (DATAINPUT (R, I) :
    CMINUS3 (R, I) * GAMMAM3 (R, I)) ;

@FOR (DMU (R) :

    ! Función objetivo: ingresos ponderados por precios;
    MAXREV3 (R) = @SUM (OUTPUT (K) : YPRICE (K) * YHAT3 (R, K)) ;

    ! OUTPUT projection;
    @FOR (OUTPUT (K) :
        @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) * Y (J, K)) >= YHAT3 (R, K) ;
    );

    ! INPUT redistribuibles: igualdad;
    @FOR (INPUT (I) :
        @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) * X (J, I)) <= XHAT3 (R, I) ;
        XHAT3 (R, I) = X (R, I) + GAMMAP3 (R, I) - GAMMAM3 (R, I) ;
    );
);
```

```
);  
  
! INPUT no redistribuibles: restricción local = disponible;  
@FOR (INPUTND (I) :  
    @SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R) * XND (J, I)) <= XND (R, I) ;  
);  
  
! Combinación convexa;  
@SUM (DMU (J) : LAMBDA (J, R)) = 1 ;  
  
);  
  
! INPUT no redistribuibles: suma total constante (global);  
@FOR (INPUT (I) :  
    @SUM (DMU (R) : XHAT3 (R, I)) = @SUM (DMU (R) : X (R, I)) ;  
);  
  
END
```


ANÁLISIS COMPARATIVO DMU

Ejemplo 1

Estas serían las gráficas a nivel de análisis por DMU:

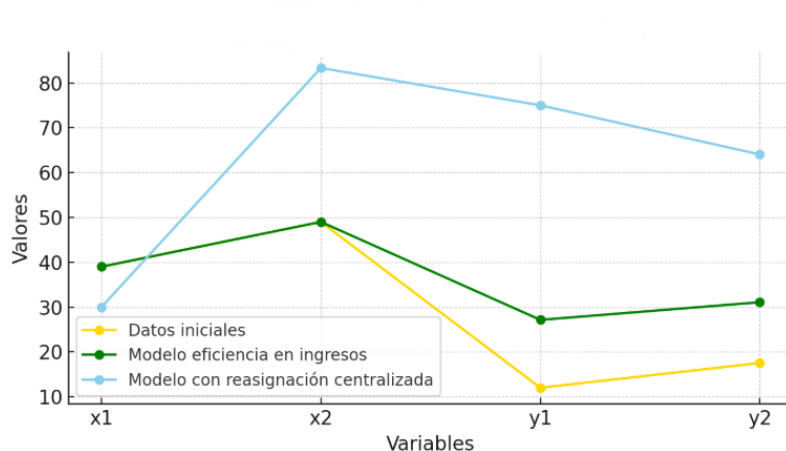


Ilustración 71 - Análisis DMU 1 Ejemplo 1

Esta DMU muestra una evolución clara hacia la eficiencia. Los outputs (y_1 , y_2) aumentan notablemente al pasar del modelo inicial al de eficiencia, lo que es típico en DEA: se maximizan los resultados sin aumentar los inputs. Posteriormente, en el modelo centralizado, se incrementan aún más, lo que sugiere que esta unidad es priorizada por su alto potencial de rendimiento global.

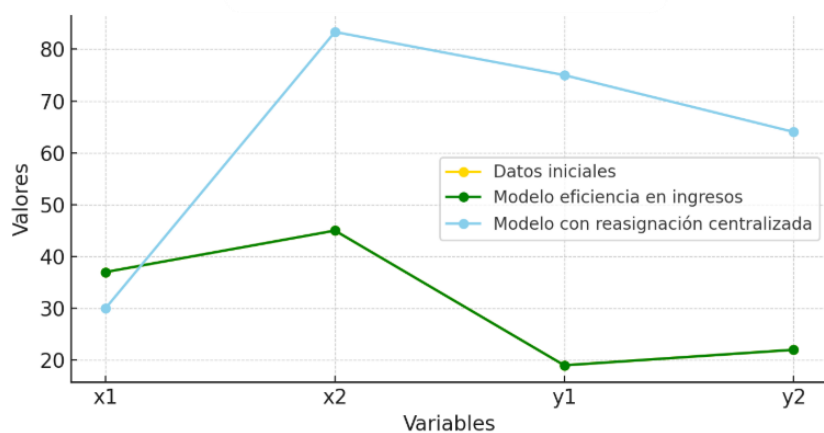


Ilustración 72 - Análisis DMU 2 Ejemplo 1

Aquí observamos una asignación de recursos más generosa en el modelo centralizado. Aunque en el modelo de eficiencia mejora ligeramente, es en la fase centralizada donde los outputs crecen significativamente. Esto indica que el sistema identifica a DMU 2 como clave para la producción colectiva.

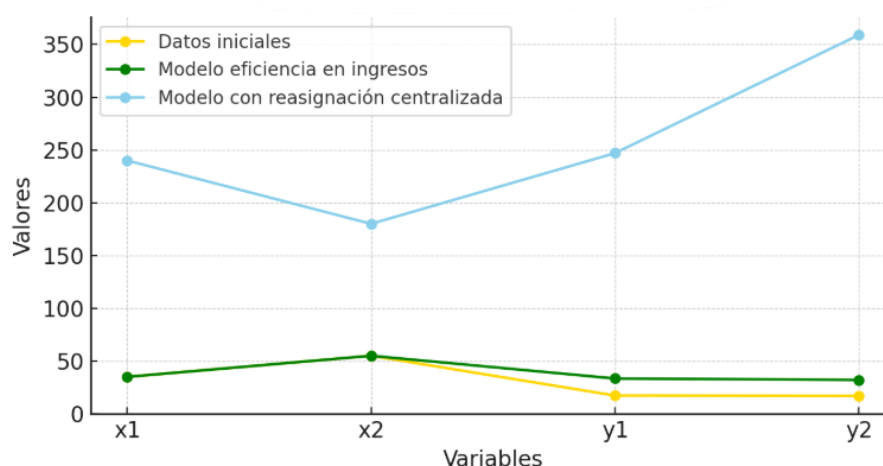


Ilustración 73 - Análisis DMU 3 Ejemplo 1

Este DMU presenta un caso paradigmático de redistribución: los valores de salida se disparan en el modelo centralizado, mientras que los inputs permanecen estables o crecen levemente. La lógica DEA aquí cede el paso a una estrategia de rendimiento total, muy marcada.

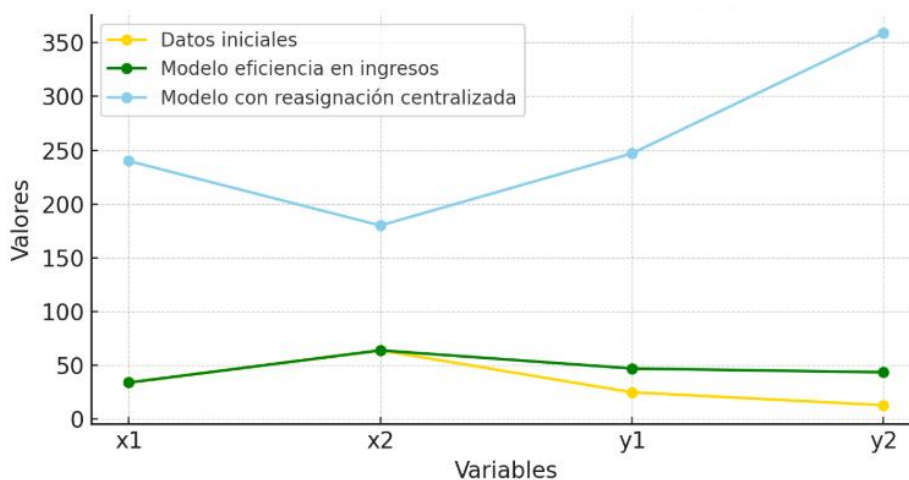


Ilustración 74 - Análisis DMU 4 Ejemplo 1

La evolución es similar a DMU 3, con una fuerte subida de los outputs en el modelo final. El modelo centralizado parece redirigir recursos a esta unidad por su eficiencia comparativa. El salto en y2 es particularmente revelador.

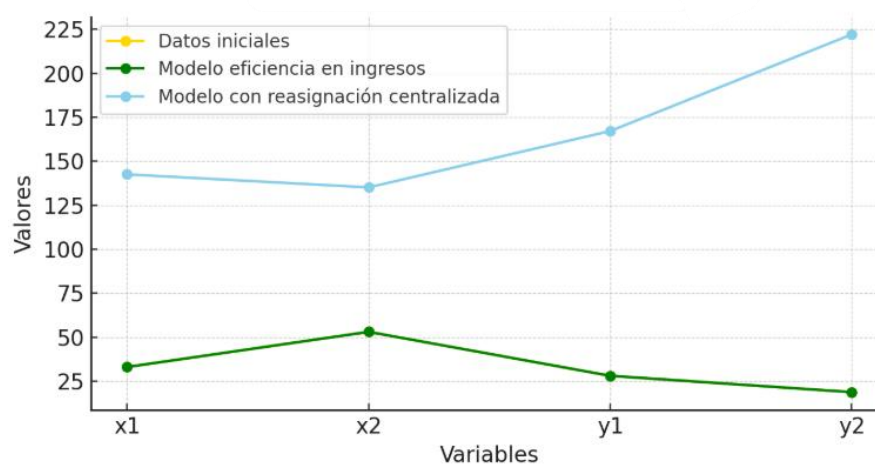


Ilustración 75 - Análisis DMU 5 Ejemplo 1

Apenas se aprecian mejoras en la etapa de eficiencia, pero el modelo centralizado introduce cambios sustanciales en todas las variables. Se interpreta como una unidad con bajo rendimiento individual pero útil en un enfoque colectivo, que recibe más inputs para producir más.

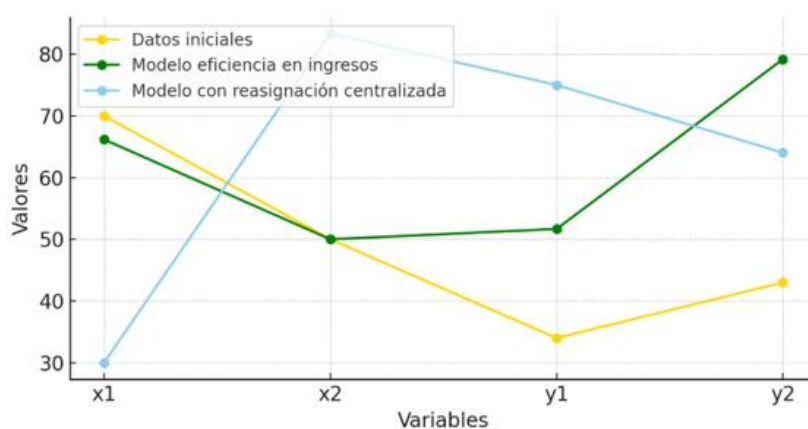


Ilustración 76 - Análisis DMU 6 Ejemplo 1

Este caso destaca por la reducción de x1 y la fuerte reasignación en outputs en el modelo centralizado. El modelo DEA actúa de forma conservadora, pero la centralización apuesta por esta unidad como motor productivo.

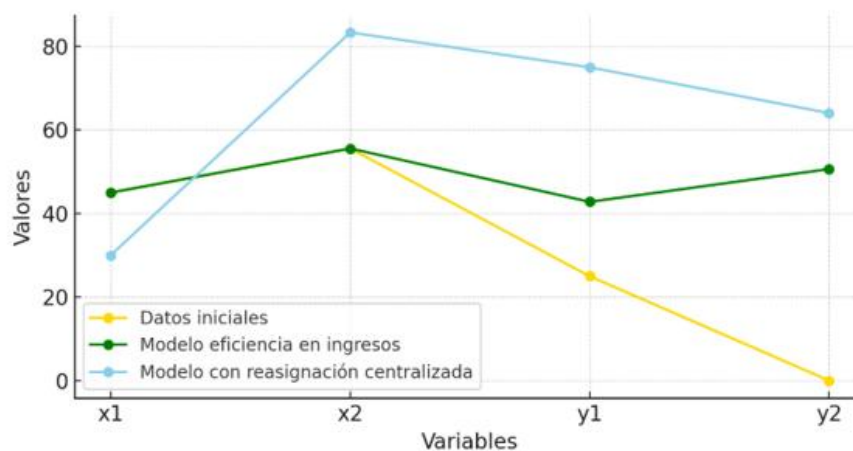


Ilustración 77 - Análisis DMU 7 Ejemplo 1

Tras un salto evidente en y1 y y2 con el modelo de eficiencia, el modelo centralizado mantiene esa tendencia y amplía outputs aún más. Se refuerza la idea de que DMU 7 es eficiente y estratégico en términos de productividad total.

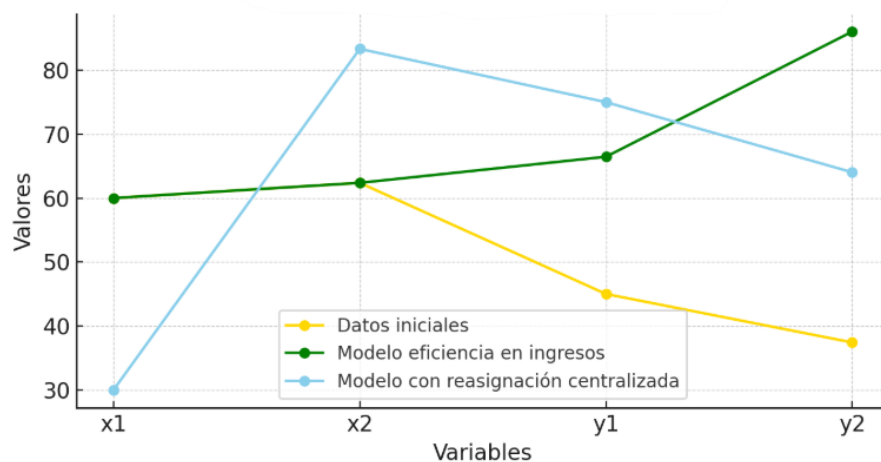


Ilustración 78 - Análisis DMU 8 Ejemplo 1

Se produce una clara mejora de eficiencia técnica, con aumento en los outputs sin necesidad de más inputs. En la etapa centralizada se observa un pequeño retroceso, lo cual indica una redistribución hacia otros DMUs con mejor retorno marginal.

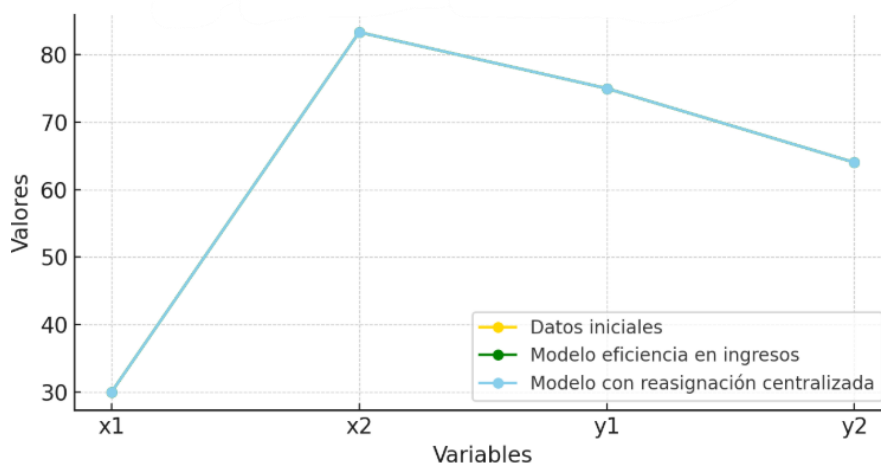


Ilustración 79 - Análisis DMU 9 Ejemplo 1

Este DMU se mantiene prácticamente inalterado en todos los escenarios. Esto puede deberse a que ya se encontraba en un punto óptimo dentro del sistema o a que sus ratios input-output no justifican una redistribución.

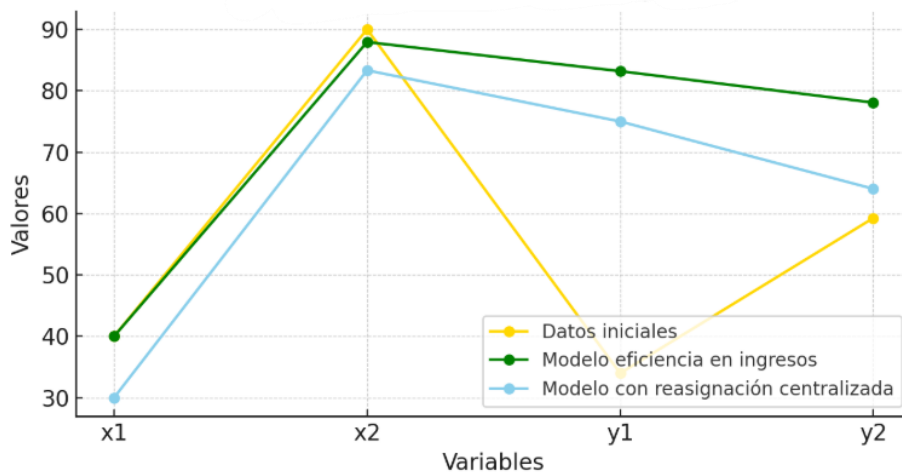


Ilustración 80 - Análisis DMU 10 Ejemplo 1

Aunque mejora en eficiencia, el modelo centralizado redistribuye parte de sus recursos, bajando ligeramente sus outputs. Puede estar cediendo capacidad a unidades con mayor productividad marginal.

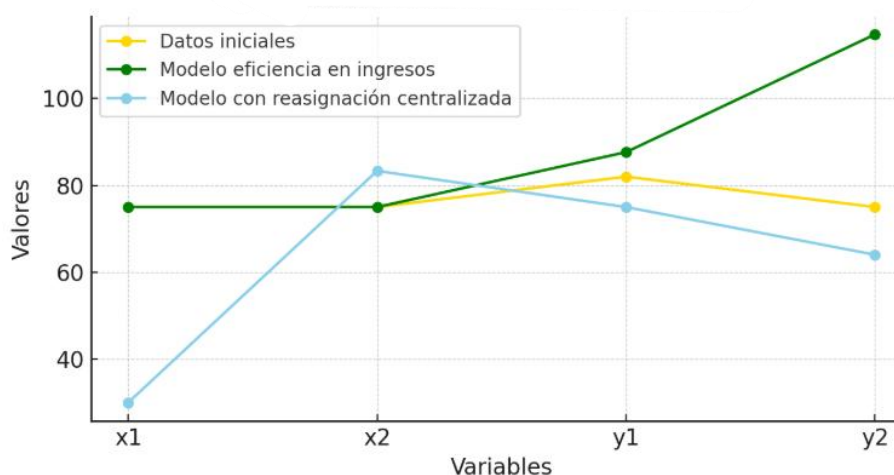


Ilustración 81 - Análisis DMU 11 Ejemplo 1

Aquí la eficiencia aumenta con claridad, pero el modelo centralizado aplica un recorte moderado en outputs. Es un buen ejemplo de cómo el modelo busca el equilibrio entre eficiencia individual y rentabilidad global.

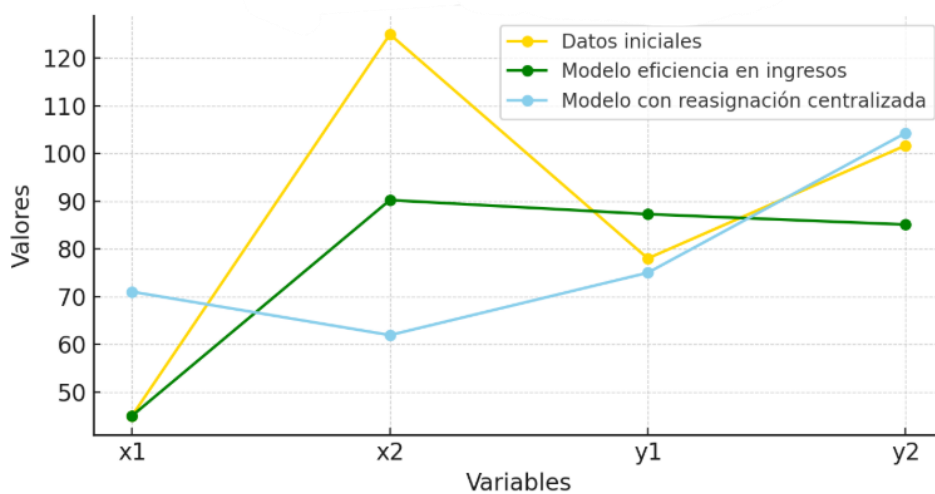


Ilustración 82 - Análisis DMU 12 Ejemplo 1

Este DMU muestra un comportamiento mixto: se ajusta bien en eficiencia, pero en el modelo centralizado vuelve a ganar protagonismo. Se le asignan más recursos y los outputs crecen, lo cual refleja su potencial.

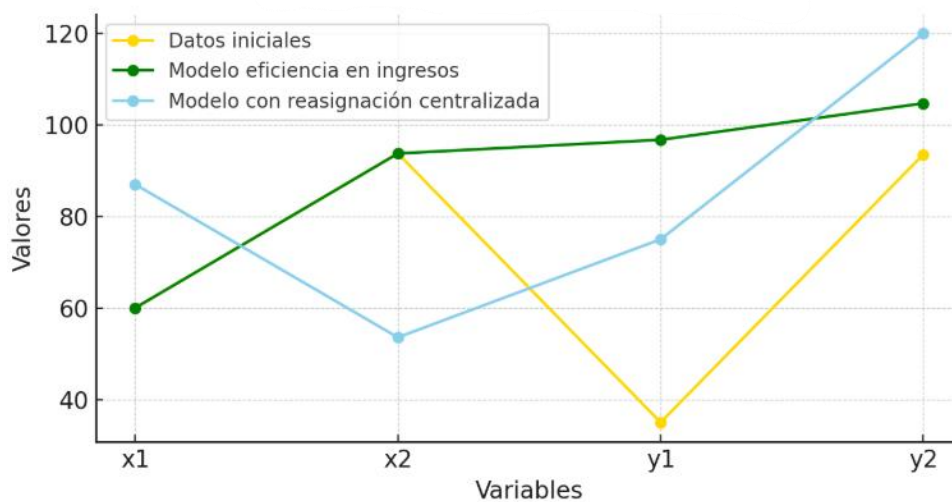


Ilustración 83 - Análisis DMU 13 Ejemplo 1

Evoluciona progresivamente en ambos modelos. Es un caso que se adapta bien al modelo DEA, pero además mantiene un buen desempeño bajo la redistribución centralizada, siendo un DMU versátil.

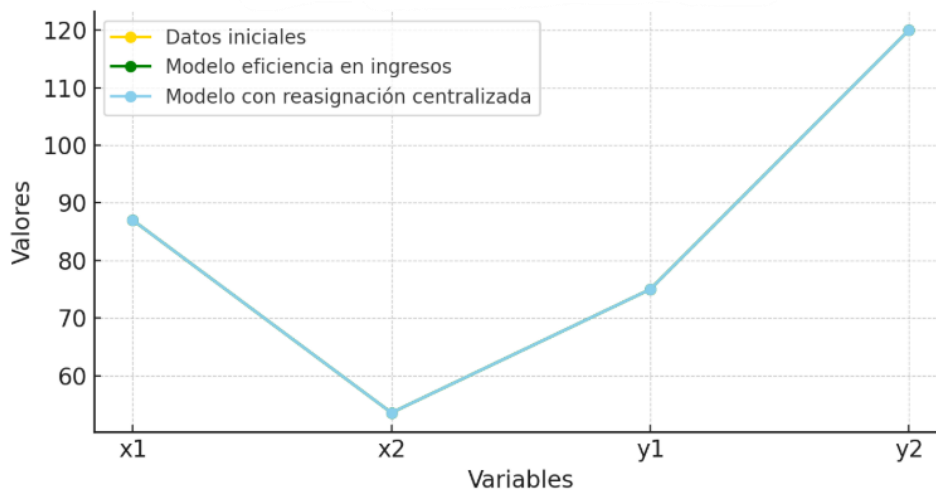


Ilustración 84 - Análisis DMU 14 Ejemplo 1

No muestra prácticamente cambios entre modelos, lo que sugiere que ya operaba con una asignación óptima o bien que su capacidad marginal de mejora no es alta.

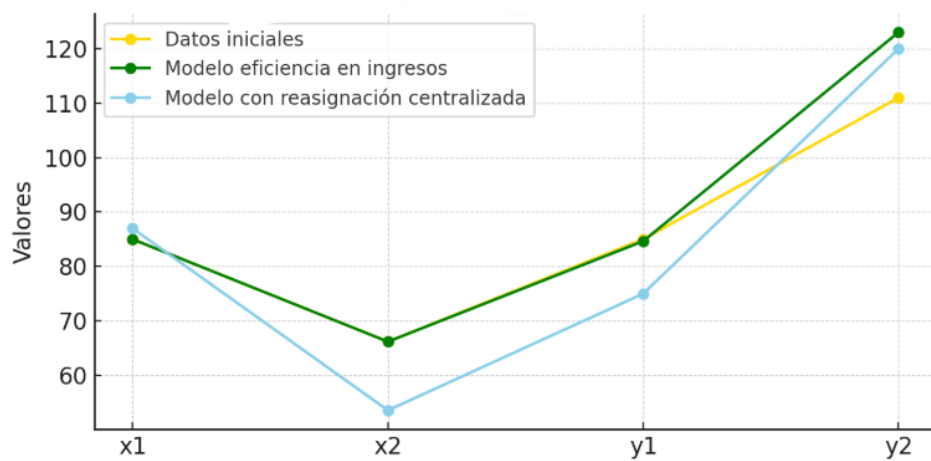


Ilustración 85 - Análisis DMU 15 Ejemplo 1

Tras una mejora clara en eficiencia, el modelo centralizado reduce ligeramente los outputs. Es un ejemplo típico de cómo se pueden retirar recursos a DMUs eficientes para reforzar a otros más necesitados.

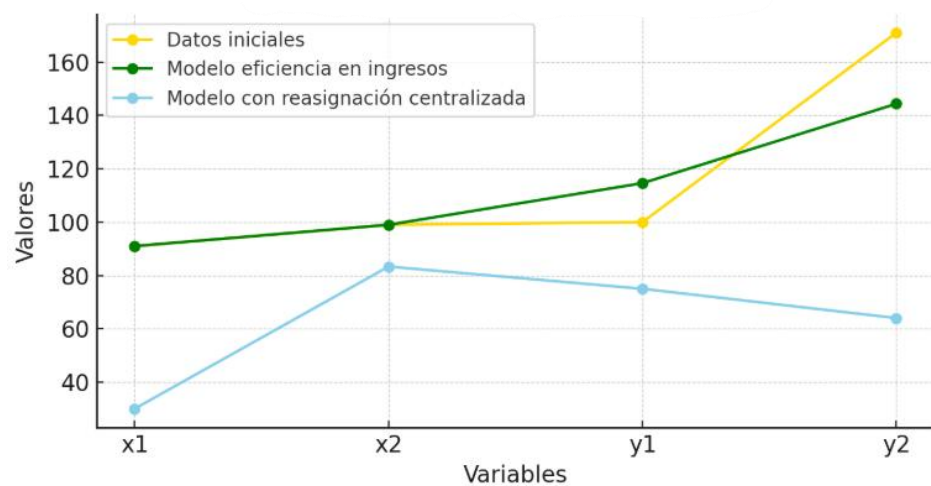


Ilustración 86 - Análisis DMU 16 Ejemplo 1

Aunque mejora con el modelo de eficiencia, el centralizado lo penaliza ligeramente. Esto puede deberse a su menor retorno relativo por unidad de input frente a otros DMUs.

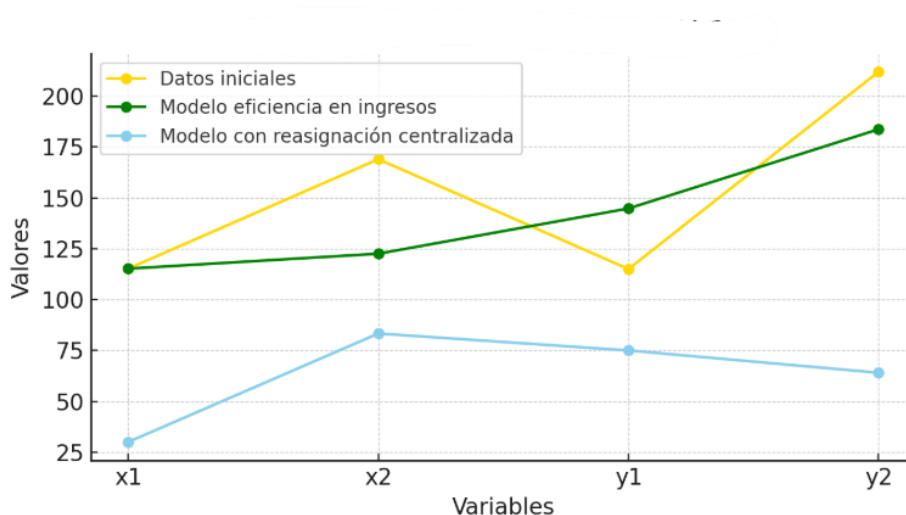


Ilustración 87 - Análisis DMU 17 Ejemplo 1

Este DMU es eficiente, pero en el modelo centralizado sus outputs bajan de forma significativa. Se interpreta como una redistribución de recursos para equilibrar el sistema global, sacrificando a algunas unidades fuertes.

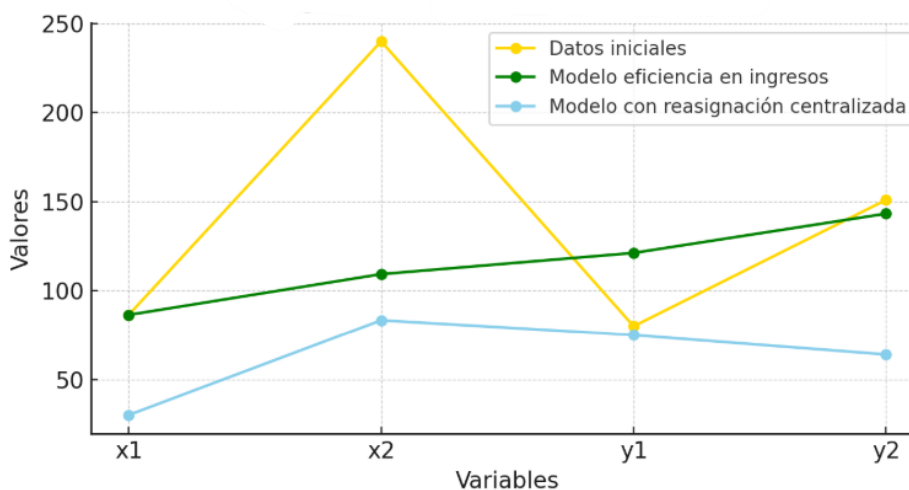


Ilustración 88 - Análisis DMU 18 Ejemplo 1

Sufre una notable pérdida en outputs al pasar al modelo centralizado. En este caso, se prioriza una reasignación hacia unidades con ratios de eficiencia colectiva más altos.

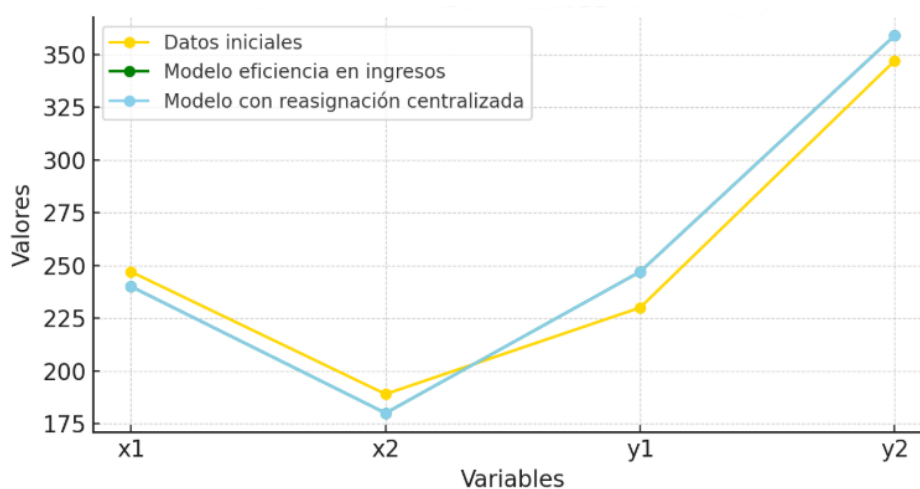


Ilustración 89 - Análisis DMU 19 Ejemplo 1

El DMU 19 mantiene una trayectoria ascendente, con mejoras sostenidas en cada modelo. Esto sugiere una alta capacidad de absorción de recursos y un buen desempeño incluso en estrategias centralizadas.

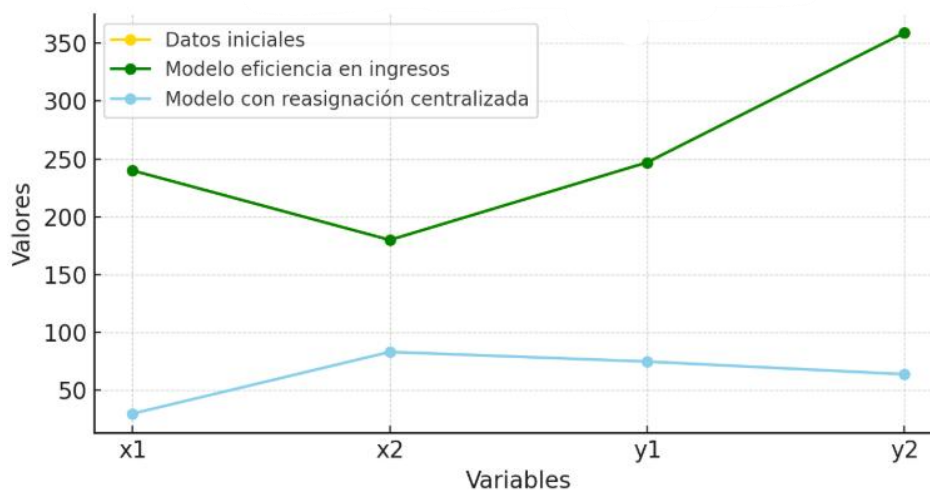


Ilustración 90 - Análisis DMU 20 Ejemplo 1

A pesar de una mejora inicial, el modelo centralizado reduce claramente sus outputs, puede deberse a un cambio en la estrategia global de asignación donde su rendimiento no compensa en comparación con otras unidades.

Ejemplo 2

Estas serían las gráficas a nivel de análisis por DMU:

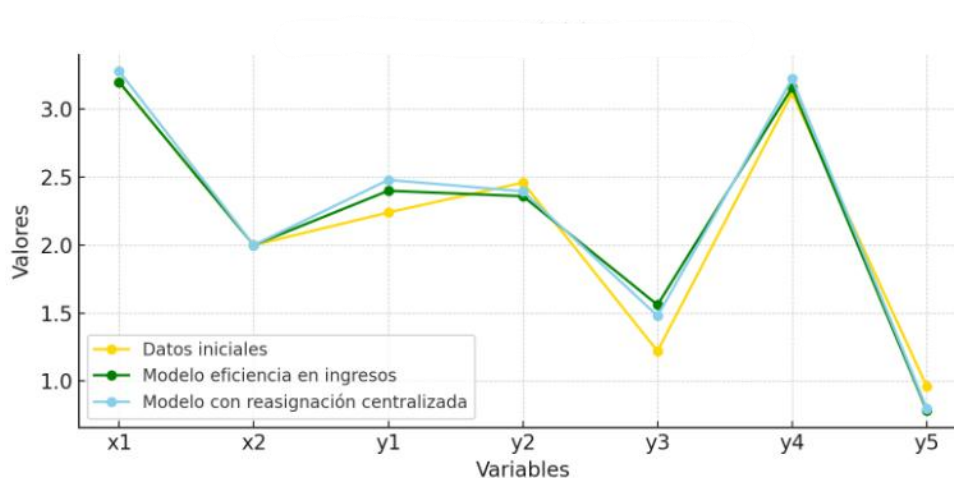


Ilustración 91 - Análisis DMU 1 Ejemplo 2

En la transición hacia el modelo de eficiencia se detecta un aumento en los outputs, conservando los niveles de inputs. Esto es coherente con el enfoque DEA, que maximiza los resultados sin alterar los recursos asignados. El modelo centralizado incrementa aún más los outputs, reflejando una asignación estratégica de recursos que potencia el rendimiento colectivo.

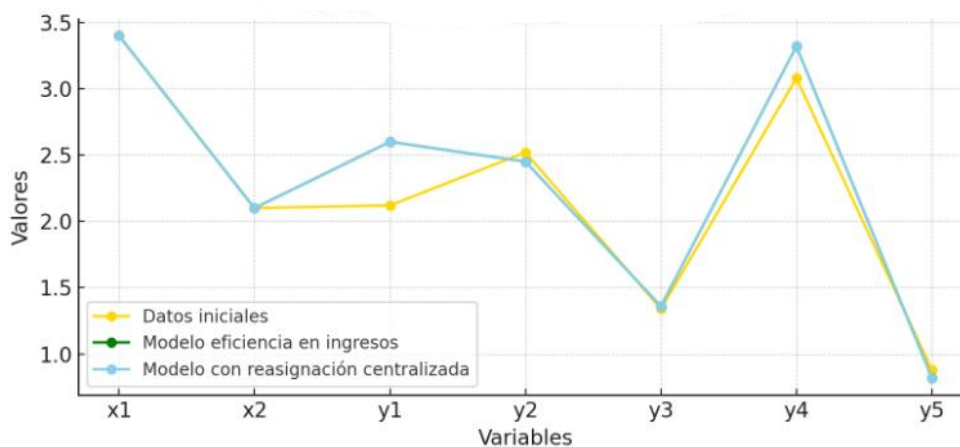


Ilustración 92 - Análisis DMU 2 Ejemplo 2

En la transición hacia el modelo de eficiencia se detecta un aumento en los outputs, conservando los niveles de inputs. Esto es coherente con el enfoque DEA, que maximiza los resultados sin alterar los recursos asignados.

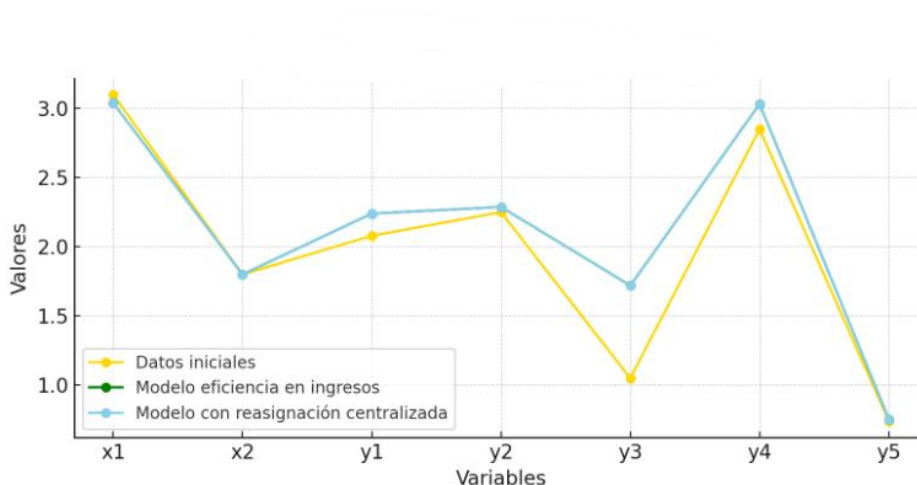


Ilustración 93 - Análisis DMU 3 Ejemplo 2

Mejora sus resultados en el modelo de eficiencia sin alterar los inputs, y mantiene ese rendimiento en la centralización. Esto refleja una posición robusta que se mantiene útil en ambos enfoques.

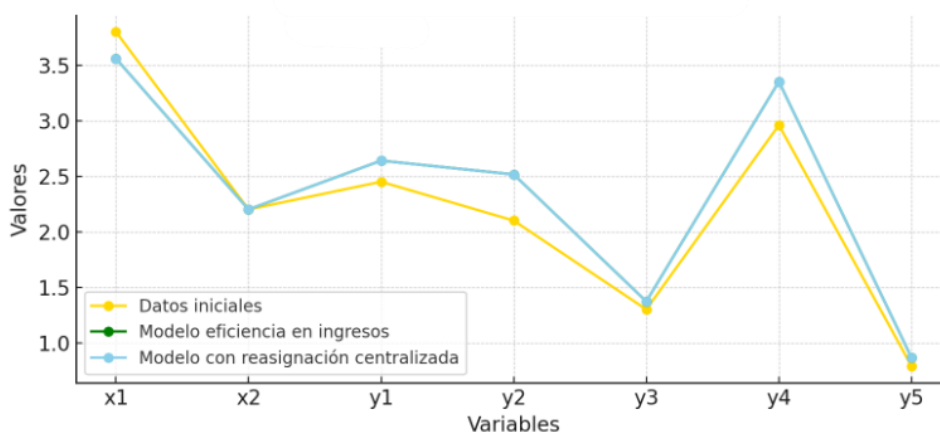


Ilustración 94 - Análisis DMU 4 Ejemplo 2

El comportamiento sigue la lógica DEA: mejoran los outputs sin incremento de inputs. Su desempeño se estabiliza posteriormente, lo que sugiere que alcanza un techo razonable dentro del sistema.

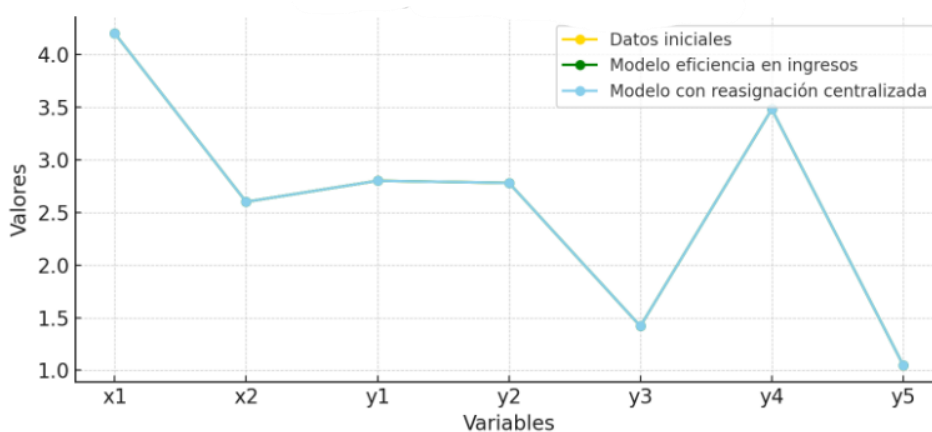


Ilustración 95 - Análisis DMU 5 Ejemplo 2

Este DMU apenas experimenta variaciones entre modelos, lo cual podría indicar una posición ya optimizada

desde el punto de vista técnico y estratégico.

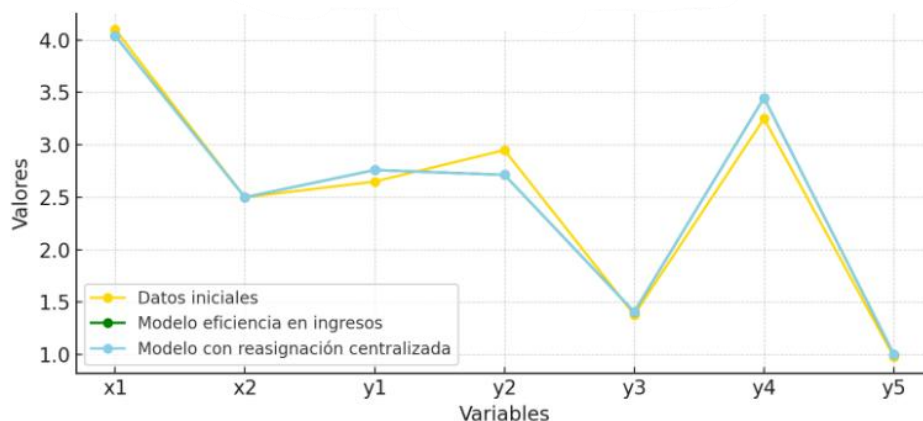


Ilustración 96 - Análisis DMU 6 Ejemplo 2

Su curva ascendente en outputs entre modelos sugiere que tiene margen de mejora y es favorecido en la redistribución. El modelo centralizado le asigna más responsabilidad en la producción colectiva.

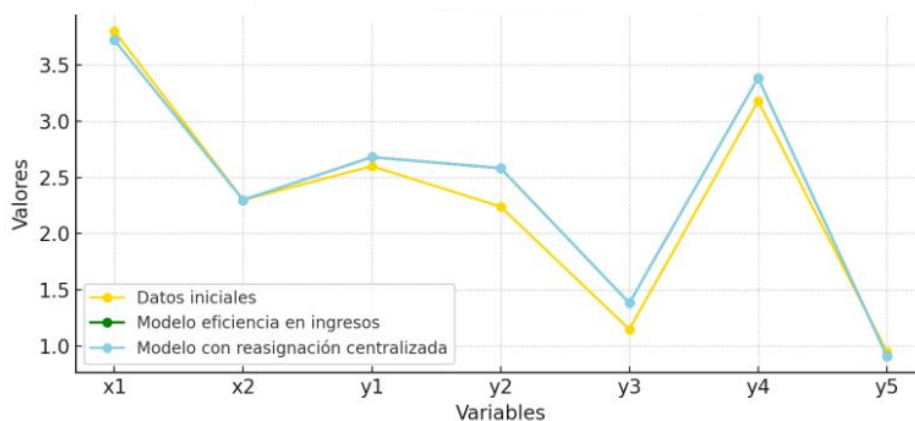


Ilustración 97 - Análisis DMU 7 Ejemplo 2

Aumenta levemente en eficiencia y se mantiene estable en el modelo centralizado. Esto puede indicar que cumple un rol específico, pero no destaca especialmente en la redistribución global.

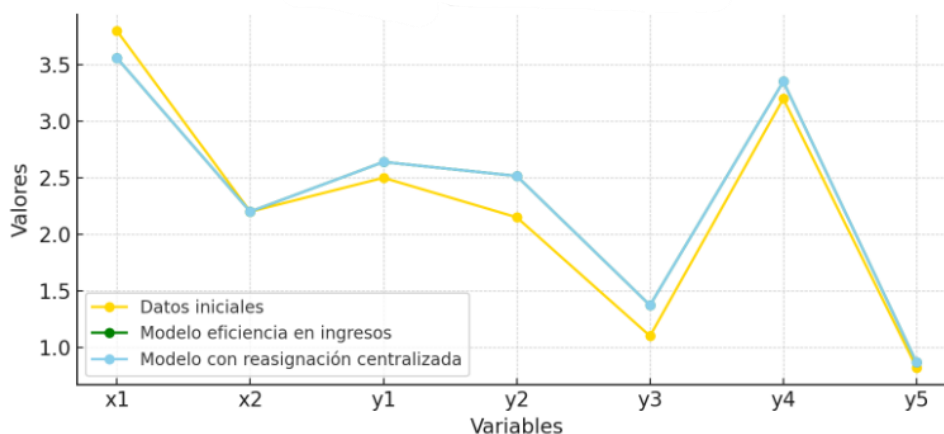


Ilustración 98 - Análisis DMU 8 Ejemplo 2

Su progresión en outputs sin cambios en inputs indica una mejora técnica clara. Es un caso típico del paso desde eficiencia individual a un mantenimiento estable en la planificación global.

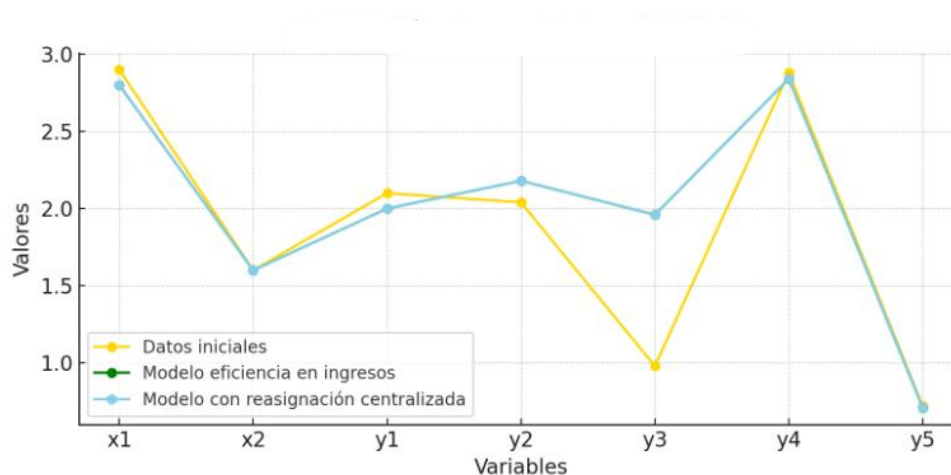


Ilustración 99 - Análisis DMU 9 Ejemplo 2

El modelo DEA mejora los resultados, y luego la centralización ajusta ligeramente los valores. Esto puede reflejar un pequeño reajuste de prioridades dentro del sistema.

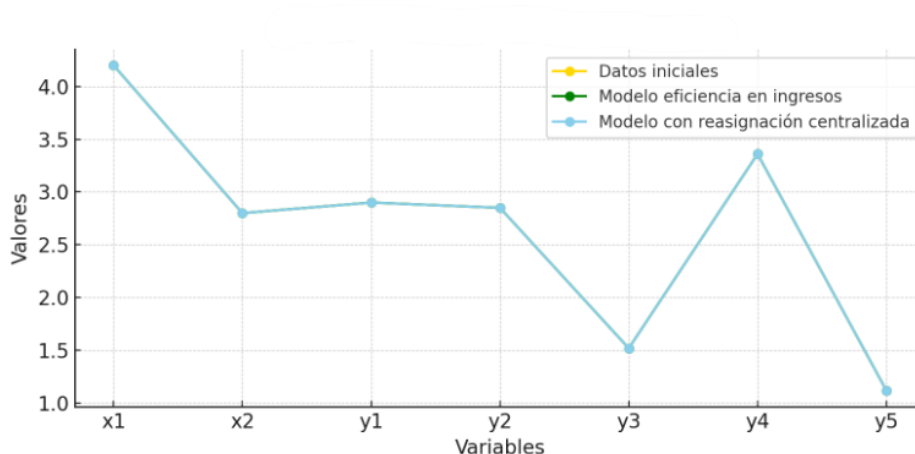


Ilustración 100 - Análisis DMU 10 Ejemplo 2

Este DMU apenas experimenta variaciones entre modelos, lo cual podría indicar una posición ya optimizada desde el punto de vista técnico y estratégico.

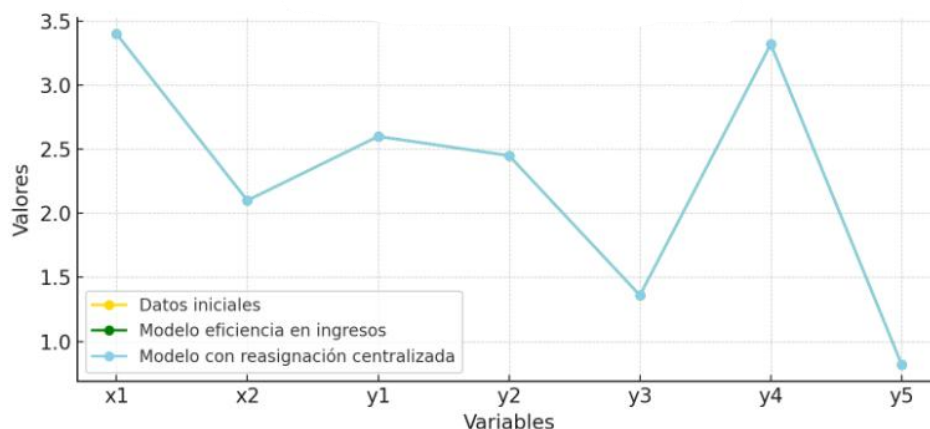


Ilustración 101 - Análisis DMU 11 Ejemplo 2

Se mantiene estable en todos los modelos. Puede interpretarse como una unidad ya alineada con los objetivos del sistema, sin necesidad de ajustes adicionales.

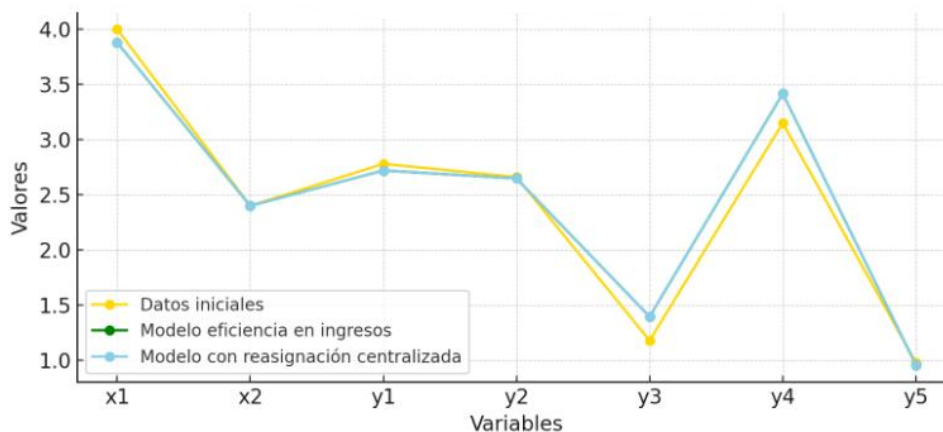


Ilustración 102 - Análisis DMU 12 Ejemplo 2

Es uno de los pocos que mejora progresivamente en ambos modelos, sugiriendo un rol creciente en la planificación centralizada por su rendimiento creciente.

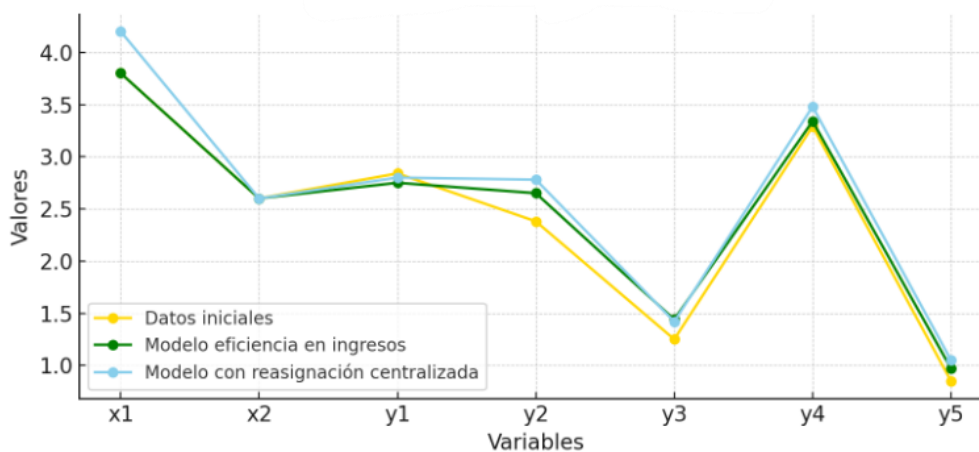


Ilustración 103 - Análisis DMU 13 Ejemplo 2

Tras un salto en eficiencia, el modelo centralizado lo potencia aún más. Es un ejemplo claro de una unidad que el sistema considera clave para maximizar la producción conjunta.

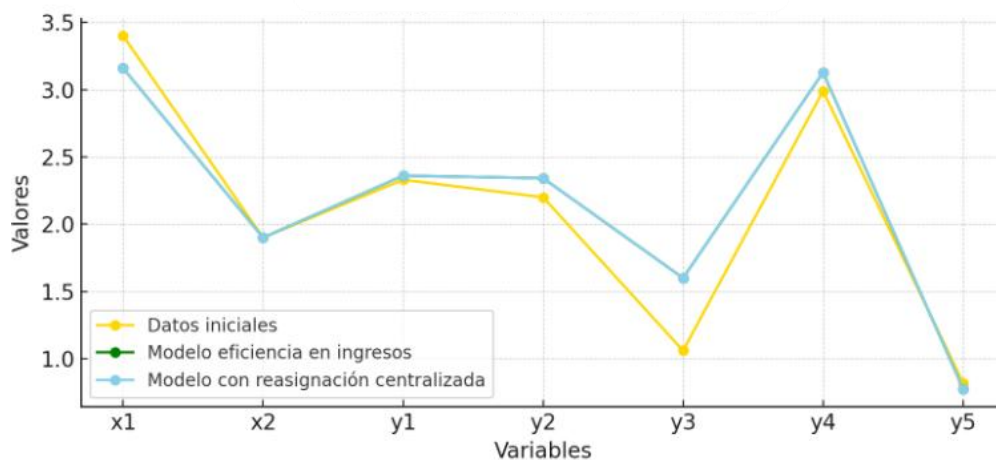


Ilustración 104 - Análisis DMU 14 Ejemplo 2

Aumenta ligeramente en eficiencia y se consolida en el modelo centralizado. Su comportamiento muestra consistencia y utilidad en distintos enfoques.

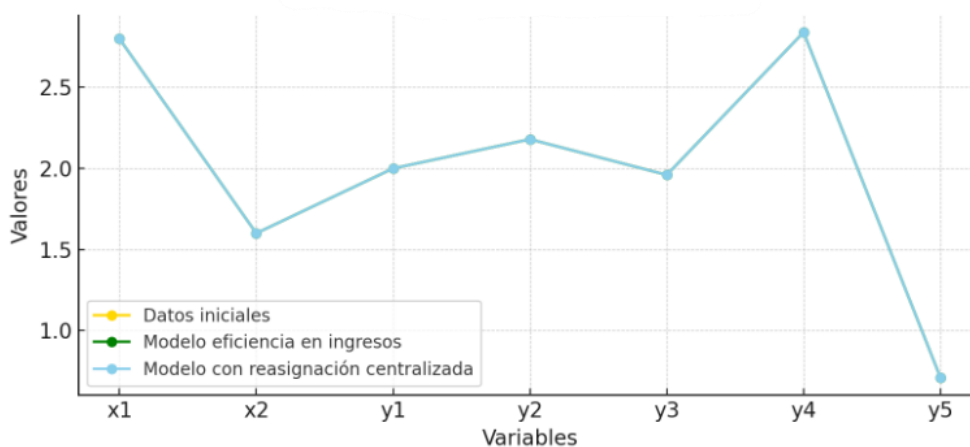


Ilustración 105 - Análisis DMU 15 Ejemplo 2

Este DMU apenas experimenta variaciones entre modelos, lo cual podría indicar una posición ya optimizada desde el punto de vista técnico y estratégico.

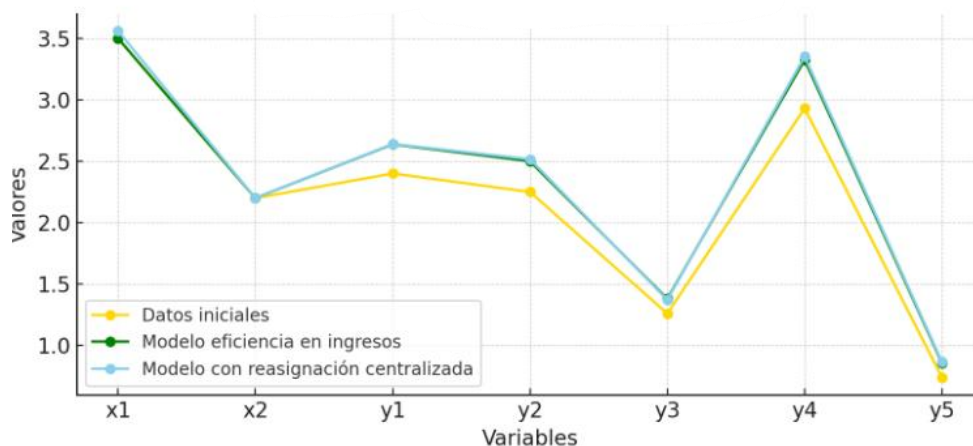


Ilustración 106 - Análisis DMU 16 Ejemplo 2

Presenta mejoras significativas en eficiencia y en la fase de reasignación, lo que demuestra que tiene una capacidad productiva superior a la que inicialmente explotaba.

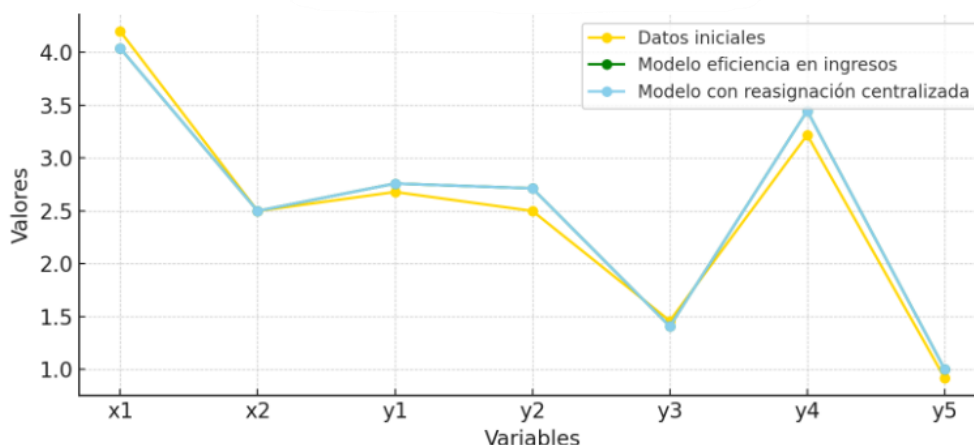


Ilustración 107 - Análisis DMU 17 Ejemplo 2

Sigue la lógica DEA con una mejora razonable, pero mantiene sus valores en la etapa centralizada, lo que puede interpretarse como estabilidad operativa.

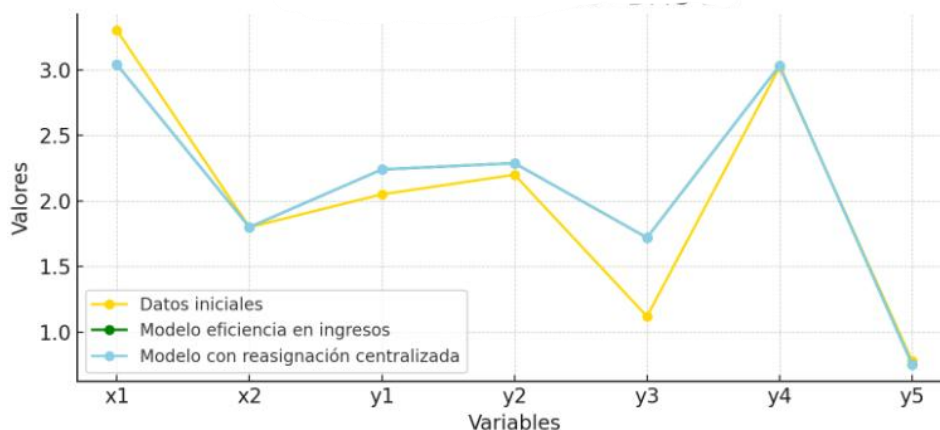


Ilustración 108 - Análisis DMU 18 Ejemplo 2

Es un caso clásico de optimización por DEA sin cambios adicionales en la redistribución. El sistema no lo penaliza ni lo prioriza, sino que conserva su nivel ajustado.

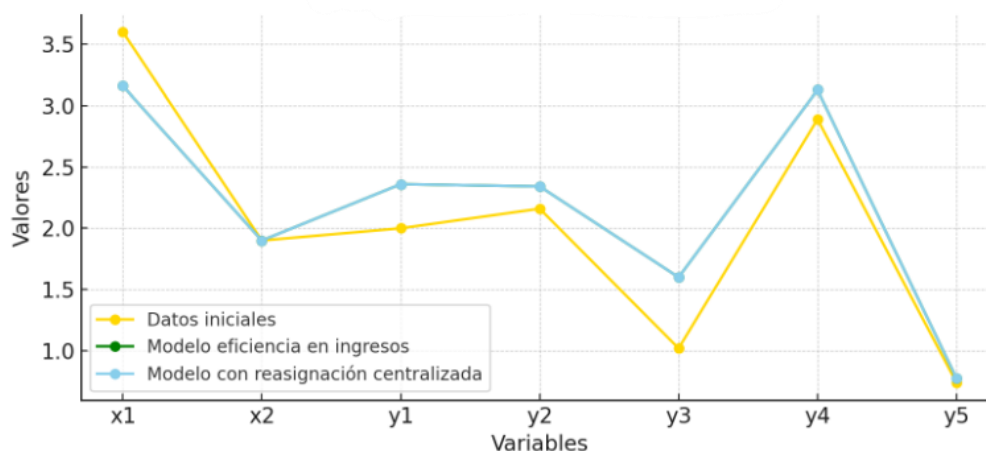


Ilustración 109 - Análisis DMU 19 Ejemplo 2

Evoluciona con mejoras claras en outputs, manteniendo los recursos estables. Es una unidad que probablemente ya estaba cercana a la frontera eficiente.

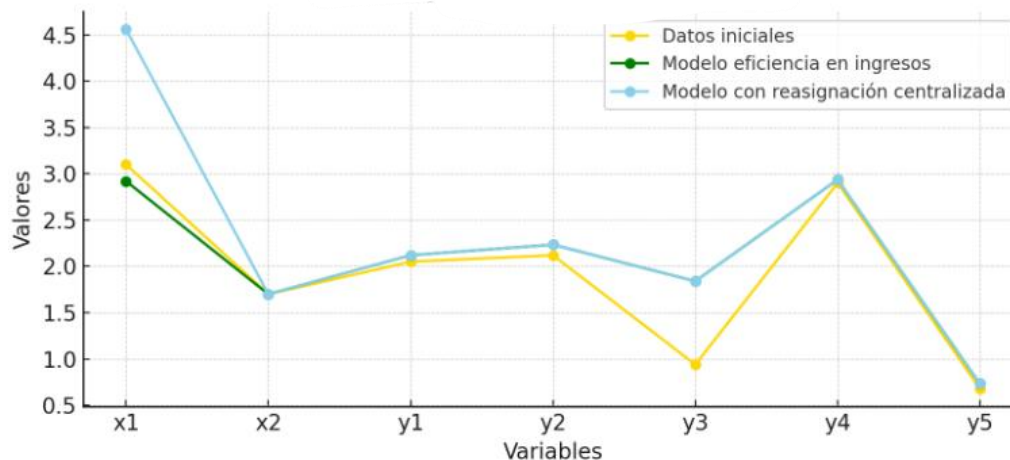


Ilustración 110 - Análisis DMU 20 Ejemplo 2

Como otros casos similares, crece en eficiencia y se estabiliza en la fase de planificación global. Esto sugiere un desempeño alineado con la estrategia central del modelo.